

Vorläufige Version des Skriptes
Wintersemester 2010/2011

Vorlesungsunterlagen

**Einführung in die
Finite Elemente Methode
– Flächentragwerke –**

Franz-Joseph Barthold

unter Mitarbeit von

Daniel Materna und Nikolai Gerzen

13. November 2011

Numerische Methoden und Informationsverarbeitung
Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen
Technische Universität Dortmund
August-Schmidt-Strasse 8, D-44221 Dortmund
<http://www.bauwesen.tu-dortmund.de/nmi>

Numerische Methoden und Informationsverarbeitung
Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen
Technische Universität Dortmund
August-Schmidt-Straße 8
D-44221 Dortmund
Internet: www.bauwesen.tu-dortmund.de/nmi

Professor Dr.-Ing. habil. Franz-Joseph Barthold
E-Mail: franz-joseph.barthold@tu-dortmund.de

Dr.-Ing. Daniel Materna
E-Mail: daniel.materna@tu-dortmund.de

Dipl.-Ing. Nikolai Gerzen
E-Mail: nikolai.gerzen@tu-dortmund.de

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Ohne Genehmigung des Autors ist es nicht gestattet, dieses Manuskript ganz oder teilweise auf fotomechanischen Wegen (Fotokopie, Mikrokopie, Digitalisierung) zu vervielfältigen.

Vorwort

Das Skript *Einführung in die Finite Elemente Methode – Flächentragwerke* dient zur Ergänzung der Vorlesungen der Grundlagenfächer *Technische Mechanik, Statik und Dynamik* sowie *Numerische Methoden und Informationsverarbeitung* der Fakultät Architektur und Bauingenieurwesen der Technischen Universität Dortmund.

Die vorliegende Version umfasst eine Darstellung, die sich an die Vorlesungen zur Thematik anlehnt. Trotzdem sind die Unterlagen kein vollständiger Ersatz für den Besuch der Veranstaltungen und sollen auch nicht vom begleitenden Studium der angegebenen Literatur abhalten.

Den wissenschaftlichen Mitarbeitern Daniel Materna und Nikolai Gerzen danke ich für die zahlreichen und umfangreichen Beiträge, ohne die eine ausführliche Zusammenstellung nicht möglich ist. Den studentischen Hilfskräften Wojciech Kijanski und Dustin Kumor danke ich für die Unterstützung bei der Erstellung der Bilder, der Beispielaufgaben sowie der begleitenden Übungsunterlagen.

Es wird weiterhin ausdrücklich um Kritik und Verbesserungsvorschläge gebeten. Für Hinweise auf Fehler sind wir dankbar. Diese können beispielsweise per E-Mail oder auf persönlichem Wege übermittelt werden.

Dortmund, im November 2010

Franz-Joseph Barthold

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Die Scheibe	3
2	Die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	5
2.1	Vektoren, Tensoren und Matrizen	5
2.1.1	Vektoren und ihre Matrizendarstellung	5
2.1.1.1	Vektordarstellung in krummlinigen Basissystemen	5
2.1.1.2	Matrizen der krummlinigen Vektorkoeffizienten	6
2.1.1.3	Vektordarstellung für kartesische Basissysteme	7
2.1.1.4	Matrizen der kartesischen Vektorkoeffizienten	7
2.1.1.5	Zusammenfassung	7
2.1.2	Tensoren und ihre Matrizendarstellung	8
2.1.2.1	Tensordarstellung in krummlinigen Basissystemen	8
2.1.2.2	Tensordarstellung für kartesische Basissysteme	8
2.1.2.3	Matrizen der kartesischen Tensorkoeffizienten	9
2.1.3	Hinweise zur Struktur und Notation der Darstellung	9
2.2	Kinematik	10
2.2.1	Gebiet und Rand	10
2.2.2	Deformation und Verschiebung	10
2.2.3	Lagrangesche vs. Eulersche Betrachtungsweise	12
2.2.4	Deformationsgradient und Verschiebungsgradient	13
2.2.5	Verzerrungsmaß und Verzerrungstensor	14
2.2.6	Multiplikative Zerlegungen bei großen Deformationen	17
2.2.6.1	Polare Zerlegung	17
2.2.6.2	Volumetrische und isochore Anteile	17
2.2.6.3	Elastische und plastische Anteile	19
2.2.7	Kleine Deformationen und linearer Verzerrungstensor	19
2.2.8	Veranschaulichung des linearen Verzerrungstensors	21
2.2.8.1	Normalverzerrungen vs. Ingenieurdehnungen	21
2.2.8.2	Schubverzerrungen vs. Ingenieurgleitungen	21
2.2.8.3	Der ebene Verzerrungszustand	22
2.2.9	Verträglichkeitsbedingungen für die linearen Verzerrungen	22
2.2.10	Invarianten und Eigenwerte	25
2.2.10.1	Eigenwerte des linearen Verzerrungstensors	25
2.2.10.2	Hauptachsenproblem	25

2.2.11	Additive Zerlegungen bei kleinen Deformationen	26
2.2.11.1	Zerlegung in Verzerrungen und Drehungen	26
2.2.11.2	Zerlegung in Kugeltensor und Deviator	27
2.2.11.3	Zerlegung in elastische und plastische Anteile	29
2.3	Spannungen und Gleichgewichtsaussagen	29
2.3.1	Kraft- und Spannungsvektoren	29
2.3.2	Spannungstensor	30
2.3.2.1	Das Cauchy Fundamentallemma	30
2.3.2.2	Das Cauchy Spannungstheorem	30
2.3.2.3	Klassische Ingenieurnotation für die Spannungen	33
2.3.2.4	Vergleich der Notationen und Vereinbarungen	33
2.3.3	Das lokale Kräfte- und Momentengleichgewicht	35
2.3.3.1	Das Momentengleichgewicht	35
2.3.3.2	Das Kräftegleichgewicht	35
2.3.3.3	Tensorielle Notation versus klassische Notation	37
2.3.4	Gleichgewicht am infinitesimalen Scheibenelement	37
2.3.4.1	Momentengleichgewicht	38
2.3.4.2	Kräftegleichgewicht	39
2.4	Konstitutive Gleichungen	40
2.4.1	Grundlagen der Materialtheorie	40
2.4.1.1	Bedingungen aus Mathematik und Physik	40
2.4.1.2	Bedingungen aus der Wahl der Materialklasse	41
2.4.2	Die Eigenschaften der linearen Elastizität	41
2.4.2.1	Grundlagen der Hyperelastizität	41
2.4.3	Die lineare Elastizität in Matrizenschreibweise	43
2.4.3.1	Eigenschaften der allgemeinen linearen Elastizität	43
2.4.3.2	Das allgemeine Elastizität in Matrizenschreibweise	44
2.4.4	Das isotrope, linear-elastische Materialverhalten	45
2.4.4.1	Die Struktur isotroper, elastischer Materialgesetze	45
2.4.5	Das Hookesche Werkstoffgesetz	46
2.4.5.1	Absolute Tensorschreibweise.	46
2.4.5.2	Indeschreibweise für kartesische Koordinaten.	46
2.4.5.3	Darstellung in Matrizenschreibweise	47
2.4.5.4	Der ebene Spannungszustand (ESZ)	47
2.4.5.5	Der ebene Verzerrungszustand (EVZ)	48
2.4.6	Bestimmung der Lamé-Parameter λ und μ	48
2.4.6.1	Experimente zur Bestimmung der Parameter	49
2.4.6.2	Interpretation der Ergebnisse	52
2.4.6.3	Zusammenstellung der Materialparameter	54
3	Die Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie	57
3.1	Randwertprobleme für die Verschiebungen	58
3.1.1	Navier-Lamésche Verschiebungsdifferentialgleichungen	58
3.1.1.1	Herleitung der Verschiebungsdifferentialgleichung	58
3.1.1.2	Darstellung in Matrizenschreibweise	59

3.1.1.3	Eigenschaften der Verschiebungs-DGL	59
3.1.2	Biharmonische DGLen für die Verschiebungen	60
3.2	Randwertprobleme für die Spannungen	61
3.2.1	Biharmonische Differentialgleichungen für die Spannungen	61
3.2.2	Die DGL für die Maxwellschen Spannungsfunktionen	63
3.2.2.1	Einführung der Spannungsfunktionen	64
3.2.2.2	Herleitung der DGLen für die Spannungsfunktion	65
3.2.2.3	Die Maxwellsche Spannungsfunktion der Scheibe	66
3.2.3	Die direkte Herleitung der Scheibentheorie	68
4	Ausgewählte analytische Lösungen der linearen Elastizitätstheorie	71
4.1	Lösungsfunktionen der Bipotentialgleichungen	72
4.1.1	Bipotentialgleichungen in Zylinderkoordinaten	72
4.1.2	Ebener Spannungszustand in Polarkoordinaten	73
4.1.3	Ebener Spannungszustand in kartesischen Koordinaten	74
4.1.4	Analytische Lösungen	75
4.2	Elastische Halbebene unter Einzellast	75
4.3	Elastischer Halbraum unter Einzellast	80
4.4	Scheibe mit Loch	88
5	Die schwache Form für die lineare Elastizitätstheorie	93
5.1	Formulierung der schwachen Form	93
5.2	Mathematisch orientierte Notation	94
5.3	Darstellung in Matrixschreibweise	95
6	Die Energieprinzipien für die lineare Elastizitätstheorie	97
6.1	Das Dirichletsche Prinzip	97
6.2	Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	98
6.2.1	Äquivalenz zur schwachen Form	98
6.3	Das Hu-Washizu Funktional der linearen Elastizität	100
6.4	Das Hellinger-Reissner Funktional der linearen Elastizität	100
7	Diskretisierung der Scheibe mit finiten Elementen	101
7.1	Vorbemerkungen	101
7.2	Das isoparametrische Konzept	103
7.2.1	Ansatzfunktionen	105
7.2.1.1	Konstruktion der Ansatzfunktionen	105
7.2.1.2	Bilineare Ansatzfunktionen	106
7.2.2	Approximation der Geometrie	108
7.2.3	Approximation der Verschiebung	112
7.2.4	Approximation der Verzerrungen	113
7.2.5	Jacobi Transformation	114
7.3	Diskretisierung der schwachen Form	115
7.3.1	Zerlegung der schwachen Form in Elementanteile	115
7.3.2	Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor	116

8	Numerisches Beispiel für ein bilineares Scheibenelement	117
8.1	System	117
8.2	FE-Modell	117
8.3	Bestimmung der Steifigkeitsmatrix	118
8.4	Bestimmung des Lastvektors	124
8.5	Lösung des linearen Gleichungssystems	125
8.6	Vergleich Stablösung	126
9	FEMSOLID - Ein Beispiel für ein FEM-Programm	127
10	Erweiterte Elementformen für die Scheibe	129
11	Die gemischte Methode für die Scheibe	131
11.1	Grundgleichungen	131
11.1.1	Kugeltensor und Deviator	131
11.1.2	Schwache Form der Gleichgewichtsbedingung	132
11.1.3	Beschreibung der Volumendilatation	132
11.1.4	Beschreibung der Druckspannungen	133
11.1.5	Beschreibung der Deviatorspannungen	133
11.1.6	Zusammenstellung der schwachen Formulierungen	134
11.1.7	Energiepotential	134
11.2	Diskretisierung der schwachen Formen	134
11.2.1	Unabhängige Ansätze für die drei Feldgrößen	134
11.2.2	Statische Kondensation auf Systemebene	136
11.2.3	Statische Kondensation auf Elementebene	136
11.2.4	Die B-bar Formulierung	136
11.3	Implementierung der B-bar Methode	138
11.3.1	Berechnungsschema der modifizierten Steifigkeitsmatrix	138
11.3.2	Hinweise zur Implementierung	138
11.3.3	Überprüfung der Dimensionen einzelner Größen	141
11.4	Übung zum Thema: B-bar Methode	142
11.5	Vergleichslösung mit Ansys	143
	Notation und Literatur	145
	Literaturverzeichnis	153
	Index	153

Abbildungsverzeichnis

2.1	Deformation eines Körpers	11
2.2	Polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F}	18
2.3	Beispiel für eine lineare Drehung	28
2.4	Volumen- und Flächenkräfte	29
2.5	Tensorielle Spannungskoeffizienten am Volumenelement	31
2.6	Gleichgewicht am Schnitt	32
2.7	Normal- und Schubspannungen am Volumenelement	34
2.8	Gleichgewicht am infinitesimalen Scheibenelement	38
2.9	Versuch 1: Einfache Scherung eines rechteckigen Blockes	49
2.10	Versuch 2: Konstanter Druck auf eine Kugel	50
2.11	Versuch 3: Einaxialer Zug eines kreisförmigen Stabes	51
4.1	Rand einer Scheibe mit Belastung	76
4.2	Verlauf der Spannungskomponenten	78
4.3	Einführung von Polarkoordinaten	78
4.4	Linien der Hauptnormalspannungen	79
4.5	Verteilung der Radialspannungen	80
4.6	Der elastische Halbraum mit Einzellast	81
4.7	Verteilung der Spannungskomponente σ_z	85
4.8	Spannungsverteilung im elastischen Halbraum	87
4.9	Gelochte Scheibe unter einachsigem Zug	88
4.10	Spannungsverläufe in der gelochten Scheibe	92
7.1	Zerlegung des Gebietes Ω in finite Elemente Ω_e	102
7.2	Isoparametrische Abbildung	104
7.3	Pascalsches Dreieck für zweidimensionale Ansatzfunktionen	105
7.4	Referenzelement oder Parameterraum Ω_p	107
7.5	Bilineare Ansatzfunktionen	108
7.6	Beispiel zur Koordinatentransformation	110
8.1	System und Abmessungen	117
8.2	Freiheitsgrade Scheibenelement	118
8.3	Randbedingungen	119
8.4	Gausspunkte	123
8.5	Eingespannter Stab	126

Tabellenverzeichnis

2.1	Beziehungen zwischen den Materialparametern	55
8.1	Numerische Integration für K_{11}	123

1 Einleitung

Das Skript *Einführung in die Finite Elemente Methode – Flächentragwerke* beschäftigt sich mit den Grundlagen der *Finite Elemente Methode* in der Anwendung auf ebene Flächentragwerke. Diese Tragstrukturen bilden einen besonderen Schwerpunkt in der Ausbildung des *Konstruktiven Bauingenieurs* sowohl für das Verständnis der mechanischen Grundlagen, für die Beurteilung des statischen Tragverhaltens als auch für die fundierte Anwendung numerischer Methoden.

Im Studium werden zunächst Stabtragwerke behandelt. Diese Zusammenstellung setzt somit die Kenntnis des Skriptes *Einführung in die Finite Elemente Methode – Stabtragwerke* voraus.

Die mathematisch-mechanische Modellbildung ebener Flächentragwerke führt zu partiellen Differentialgleichungen in den beiden Koordinaten der Flächenebene. Der mathematische Aufwand und die Ansprüche an die mathematischen Grundkenntnisse sind daher deutlich höher als bei den gewöhnlichen Differentialgleichungen der Stabtragwerke.

Teil I

Die Scheibe

2 Die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie

In diesem Kapitel werden die Grundgleichungen zur Kinematik, zum Gleichgewicht und zu den konstitutiven Beziehungen für die lineare Elastizitätstheorie hergeleitet. Eine ausführliche Darstellung der (linearen) *Elastizitätstheorie* ist in vielen Lehrbüchern [6, 8] zu finden. Die vorliegende Zusammenstellung bezieht sich in Teilen auf den Beitrag [11], der auch als Vorlesungsskript *Elastizitätstheorie* [12] verfügbar ist.

2.1 Vektoren, Tensoren und Matrizen

Die *Kontinuumsmechanik* bedient sich der *Tensordarstellung* zur Beschreibung der mechanischen Zusammenhänge bei der Deformation von Festkörpern. Hieraus kann die in weiten Teilen des Ingenieurwesens übliche *Matrizendarstellung* der Elastizitätstheorie abgeleitet werden. An dieser Stelle sollen die Beziehungen zwischen Vektoren und Tensoren einerseits und den Matrizen andererseits dargestellt werden. Eine detaillierte Darstellung der Zusammenhänge kann den Lehrbüchern Tensorrechnung [3, 9, 10] entnommen werden. Das Vorlesungsskript *Einführung in die Kontinuumsmechanik – Vektor- und Tensorrechnung* [2] stellt die erforderlichen Grundlagen in der Notation dieses Skriptes zusammen.

2.1.1 Vektoren und ihre Matrizendarstellung

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie eine allgemeine Vektordarstellung bezüglich beliebiger krummliniger Basissysteme für den Sonderfall kartesischer Basen durch die Verwendung der Matrizendarstellung wesentlich vereinfacht werden kann.

2.1.1.1 Vektordarstellung in krummlinigen Basissystemen

Die *Vektoren* $\mathbf{x} \in V$ des dreidimensionalen *Vektorraums* V ($\dim V = n = 3$) besitzen die Darstellung

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{g}_i = x^i \mathbf{g}_i = x^1 \mathbf{g}_1 + x^2 \mathbf{g}_2 + x^3 \mathbf{g}_3. \quad (2.1)$$

Die *Komponenten* des Vektors \mathbf{x} sind selbst wieder Vektoren $x^1 \mathbf{g}_1, x^2 \mathbf{g}_2, x^3 \mathbf{g}_3$, die jeweils eine Teilinformation von \mathbf{x} beinhalten. Die Komponenten bestehen dabei

aus den *kontravarianten*¹ Koeffizienten x^1, x^2, x^3 und den zugehörigen *kovarianten*² Basisvektoren $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$. Mit Hilfe der *Einsteinschen Summenkonvention*³ kann die oben eingeführte Schreibweise ohne die Angabe des Summensymbols verwendet werden. Eine analoge Darstellung mit den *kovarianten Koeffizienten* x_1, x_2, x_3 und den zugehörigen *kontravarianten Basisvektoren* $\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3$ liefert

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n=3} x_i \mathbf{g}^i = x_i \mathbf{g}^i = x_1 \mathbf{g}^1 + x_2 \mathbf{g}^2 + x_3 \mathbf{g}^3. \quad (2.2)$$

Die ko- und kontravarianten Koeffizienten und Basisvektoren sind für den allgemeinen Fall krummliniger Koordinatensysteme mit schiefwinkligen Basisvektoren unterschiedlich. Die angegebenen Darstellungen müssen daher sorgsam unterschieden werden, da die Position der Indizes (hoch- oder tiefgestellt) wichtig ist. Die Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen ist über die *kovarianten* und *kontravarianten Metrikkoeffizienten*

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j = g^{ij} \quad (2.3)$$

und die Orthogonalität der beiden Basissysteme

$$\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

möglich. Das Symbol δ_i^j stellt dabei das *Kronecker-Symbol*⁴ dar. Die Metrikkoeffizienten bilden die Grundlage der Längenberechnung von Vektoren.

2.1.1.2 Matrizendarstellung der ko- und kontravarianten Vektorkoeffizienten

Jeder Vektor \mathbf{x} ist nach der Festlegung einer Basis $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ oder $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$ eindeutig über die zugehörigen Koeffizienten x^1, x^2, x^3 beziehungsweise x_1, x_2, x_3 definiert. Die Koeffizienten können durch die *Spaltenmatrizen der Koeffizienten*

$$\mathbf{x}_{\mathbf{g}_i} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}_i} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}_{\mathbf{g}^i} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\mathbf{g}^i} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.4)$$

dargestellt werden. Zur Verdeutlichung der Abhängigkeit der Koeffizienten von der gewählten Basis werden die Spaltenmatrizen der Koeffizienten mit einem Index \mathbf{g}_i bzw. \mathbf{g}^i zur Kennzeichnung der gewählten Basis $\{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$ bzw. $\{\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3\}$ versehen. Im Allgemeinen gilt $\mathbf{x}_{\mathbf{g}_i} \neq \mathbf{x}_{\mathbf{g}^i}$, d.h. die Spaltenmatrizen der ko- und kontravarianten Koeffizienten sind nicht gleich.

¹Kontravariante Größen sind mit hochgestellten Indizes gekennzeichnet.

²Kovariante Größen sind mit tiefgestellten Indizes gekennzeichnet.

³ALBERT EINSTEIN (1879-1955), deutscher Physiker.

Mit der Einsteinschen Summenkonvention wird vereinbart, dass gegenständig gleiche Indizes, eine Summation von 1 bis zur Dimension n des betrachteten Raumes (hier $n = 3$) meinen. Treten zwei gleiche Indizes (zum Beispiel i) einmal kovariant und einmal kontravariant auf, so soll summiert werden, ohne dass das Summensymbol $\sum_{i=1}^{n=3}$ erneut geschrieben wird.

⁴LEOPOLD KRONECKER (1821-1891), deutscher Mathematiker.

2.1.1.3 Vektordarstellung für kartesische Basissysteme

Die Wahl der Basis ist grundsätzlich beliebig und hat keinen Einfluß auf die Eigenschaften des Vektors \mathbf{x} . In vielen Fällen ist die Verwendung einer *kartesischen Basis* von Vorteil. In diesem Fall werden die ko- bzw. kontravarianten Basisvektoren mit \mathbf{e}_i beziehungsweise mit \mathbf{e}^i bezeichnet. In der *orthonormierten Basis* des kartesischen Koordinatensystems stehen die Basisvektoren paarweise senkrecht aufeinander und jeder Basisvektor ist auf die Einheitslänge normiert. Beide Eigenschaften können durch die Auswertung des Skalarproduktes zwischen jeweils zwei Vektoren unter Verwendung des *Kronecker-Symbols* in der Form

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

dargestellt werden. Diese Eigenschaft führt dazu, dass bei kartesischen Basen die ko- und kontravarianten Koeffizienten und Basisvektoren zusammenfallen. Es gilt somit $x_i = x^i$ und $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ und damit ist nur eine Basis mit eindeutigen Koeffizienten vorhanden.

2.1.1.4 Matrizendarstellung der kartesischen Vektorkoeffizienten

Zur Vereinfachung der Schreibweise wird bei der Verwendung kartesischer Basisvektoren auf die Angabe der Basis \mathbf{e}_i als Index zur Spaltenmatrix verzichtet. Ebenfalls bezeichnet man $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ wieder als *Vektor* im dreidimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^3 . Für kartesische Basen verwischen sich somit die Unterschiede zwischen einem Vektor $\mathbf{x} \in V$ und der zugehörigen Spaltenmatrix $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ der Koeffizienten und man schreibt

$$\mathbf{x} = x^1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x^3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Hierbei sind die Spaltenvektoren

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

die Darstellungen der Basisvektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in V$ im \mathbb{R}^3 . Man beachte den Unterschied in der Notation zwischen $\mathbf{e}_i \in V$ (aufrechte Buchstaben) und $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^3$ (gegeneigte Buchstaben). Die Matrixdarstellung ist in vielen Fällen der Ausgangspunkt der Betrachtung.

2.1.1.5 Zusammenfassung

Die Verwendung der Matrizendarstellung basiert üblicherweise auf der vorhergehenden Wahl einer kartesischen Basis. Dieses ist ein wichtiger Sonderfall, der zu einer starken Vereinfachung der Berechnung führt. Man kann sich in diesem Fall auf die Betrachtung einer einzigen Koeffizientenmatrix beschränken.

2.1.2 Tensoren und ihre Matrizendarstellung

Zwei Vektoren $\mathbf{x} \in V$ und $\mathbf{y} \in W$ können aufeinander abgebildet werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien beide Vektorräume identisch, d.h. $V = W$ und somit $\dim W = m = \dim V = n = 3$. Wir schreiben für die Abbildung $\mathbf{T} : V \rightarrow W$ mit $\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ und bezeichnen \mathbf{T} als einen zweistufigen *Tensor*. Diese Abbildung \mathbf{T} sei weiterhin linear, d.h. es gelte mit $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2$ für $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in V$ sowie $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in W$ mit $\mathbf{y}_i = \mathbf{T}\mathbf{x}_i$ für $i = 1, 2$

$$\mathbf{y} = \mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{T}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2) = \alpha_1 \mathbf{T}\mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{T}\mathbf{x}_2 = \alpha_1 \mathbf{y}_1 + \alpha_2 \mathbf{y}_2. \quad (2.7)$$

2.1.2.1 Tensordarstellung in krummlinigen Basissystemen

Die Tensoren können analog der obigen Bemerkungen für die Vektoren wieder in Koeffizienten und Basen dargestellt werden. Die Details des mathematischen Hintergrunds sowie der Herleitung müssen an dieser Stelle verborgen bleiben. Als Ergebnis erhalten wir für die Situation $V = W$ und $m = n = 3$ die Darstellungen

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = T_i^{\cdot j} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j = T_{\cdot j}^i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j = T^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j. \quad (2.8)$$

Hierbei werden die kovarianten (T_{ij}), gemischtvarianten ($T_i^{\cdot j}$ und $T_{\cdot j}^i$) sowie kontravarianten (T^{ij}) Koeffizienten bezüglich der kontravarianten ($\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$), gemischtvarianten ($\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j$ und $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$) sowie kovarianten ($\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$) Tensorbasen verwendet. Die obige Darstellung basiert wieder auf der Einsteinschen Summenkonvention, bei der die explizite Angabe des Summationssymbols entfällt.

Die unterschiedlichen Tensorbasen $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$, $\mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}_j$, $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}^j$ und $\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$ werden mittels des *dyadischen Produkts* \otimes aus den eingeführten Vektorbasen \mathbf{g}_i und \mathbf{g}^i gebildet und können wieder mit Hilfe der ko- und kontravarianten Metrikkoeffizienten ineinander umgerechnet werden. Die Details werden hier nicht angegeben.

2.1.2.2 Tensordarstellung für kartesische Basissysteme

Die oben gezeigte Vielfalt reduziert sich bei der Verwendung einer kartesischen Basis $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ auf die Darstellung

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (2.9)$$

Die ko-, kontra- und gemischtvarianten Tensorcoeffizienten sowie die ko-, kontra- und gemischtvarianten Tensorbasen sind somit identisch. Es gilt also

$$T_{ij} = T_i^{\cdot j} = T_{\cdot j}^i = T^{ij} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j.$$

Die Einsteinsche Summenkonvention wird für den vorliegenden Fall in der Form modifiziert, dass die Forderung gegenständiger Indizes fallengelassen wird. Somit soll ebenfalls von 1 bis n summiert werden, falls zwei gleiche Indizes in beliebiger Stellung auftreten. Oftmals werden dann alle Indizes tiefgestellt. Erneut zeigt

sich, dass die Verwendung einer kartesischen Basis zu einer übersichtlicheren Darstellung führt, die allerdings mit dem Verlust der Allgemeingültigkeit bezahlt wird. Es ist nach Verwendung der genannten Vereinfachungen nicht mehr möglich, aus einer Indexnotation in kartesischen Koordinaten auf die allgemeingültige Darstellung bezüglich einer beliebigen krummlinigen Basis zu schließen.

2.1.2.3 Matrizendarstellung der kartesischen Tensorkoeffizienten

Der Tensor \mathbf{T} kann für die gewählte kartesische Basis analog der obigen Vorgehensweise bei den Vektoren in eine äquivalente Darstellung mittels einer Koeffizientenmatrix überführt werden. Hierzu bemerken wir, dass die dyadischen Produkte $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ die Äquivalente

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_2^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

im $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ besitzen. Aus der Tensorform $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ ergibt sich die zugehörige Matrizendarstellung

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T = \begin{bmatrix} T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Beide Darstellungen verwenden in dieser Form die Einsteinsche Summenkonvention für beide Indizes i und j , d.h. es wird eine Doppelsumme über $i = 1, 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$ beschrieben. Eine ausführliche Darstellung lautet

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 T^{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T. \quad (2.11)$$

2.1.3 Hinweise zur Struktur und Notation der Darstellung

Die kontinuumsmechanischen Grundlagen werden zunächst in der absoluten Tensornotation angegeben. Diese Darstellung abstrahiert von der Wahl eines bestimmten Koordinatensystems und ist somit allgemeingültig. Für die weiteren Berechnungen wird daraus die Matrizendarstellung abgeleitet. Die Herleitung dieser Darstellung kann an dieser Stelle nicht erfolgen. Es werden aber die resultierenden Matrizen bezüglich des kartesischen Koordinatensystems angegeben.

Die Angaben in kartesischen Koordinaten erlauben auch eine alternative Herleitung der Beziehungen zur Verifikation und Veranschaulichung der Grundlagen.

Die Unterscheidung der Darstellungen ist anhand der verwendeten Schriftarten problemlos möglich. Vektoren $\mathbf{X}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$ werden durch aufrecht stehende fette Buchstaben symbolisiert. Für die (zweistufigen) Tensoren werden serifenlose Zeichen $\mathbf{T}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$ verwendet. Die zugehörigen Matrizen werden über schrägstehende fette Buchstaben X, x, u sowie T, ε, σ repräsentiert.

2.2 Kinematik

Die Darstellung der Bewegung deformierbarer Körper stellt ein wesentliches Element der Kontinuumsmechanik dar. Die Einführung der *Verzerrung* des Körpers und die Diskussion der wesentlichen Eigenschaften sind die zentralen Ergebnisse.

2.2.1 Gebiet und Rand

Wir beobachten die Bewegung und Deformation eines elastischen Körpers im dreidimensionalen *Anschauungsraum*. Der Anschauungsraum kann durch Einführung eines Beobachters (Ursprung) in einen dreidimensionalen *Euklidischen Vektorraum* \mathbb{E}^3 überführt werden. Durch die Verwendung kartesischer Koordinaten kann man die Betrachtungen auch im \mathbb{R}^3 durchführen.

Allgemeingültige Darstellung. Ein Gebiet Ω bezeichnet im Folgenden eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des Euklidischen Vektorraums mit dem Rand Γ . Die Vereinigung von Gebiet und Rand ist mit

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \quad (2.12)$$

definiert. Der Rand Γ soll die Lipschitz-Stetigkeit erfüllen, da dann entlang des Randes ein eindeutiger äußerer Normaleneinheitsvektor existiert, d.h. ein Vektor $\mathbf{n} = n^i \mathbf{e}_i$ mit $|\mathbf{n}| = 1$, welcher aus dem Inneren von $\bar{\Omega}$ in die Umgebung zeigt. Ferner kann der Rand Γ in einen Dirichlet-Anteil Γ_D und einen Neumann-Anteil Γ_N zerlegt werden.

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \quad (2.13)$$

Auf Γ_N sind Spannungsrandbedingungen in Form von Belastungen $\bar{\mathbf{t}}$ und auf Γ_D Verschiebungsrandbedingungen $\bar{\mathbf{u}}$ vorgeschrieben.

Matrizendarstellung. Vereinfachend werden Gebiet und Rand wieder mit den oben eingeführten Symbolen $\Omega, \Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N, \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^3$ bezeichnet. Die Normale zum Rand \mathbf{n} und die Randwerte $\bar{\mathbf{u}}$ und $\bar{\mathbf{t}}$ sind Spaltenmatrizen im \mathbb{R}^3 .

2.2.2 Deformation und Verschiebung

Ein Körper ändert bei einer Deformation seine Form und seine Lage im Raum.

Allgemeingültige Darstellung. Die Deformation ist eine Abbildung φ der vom Körper eingenommenen Teilmenge Ω auf die Bildmenge $\varphi(\Omega)$.

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^3 \quad (2.14)$$

Dabei bezeichnet man die Urbildmenge Ω als *Referenzkonfiguration* oder *undeformierte Konfiguration*. Die Bildmenge $\varphi(\Omega)$ ist die *deformierte Konfiguration*, siehe Abb. 2.1.

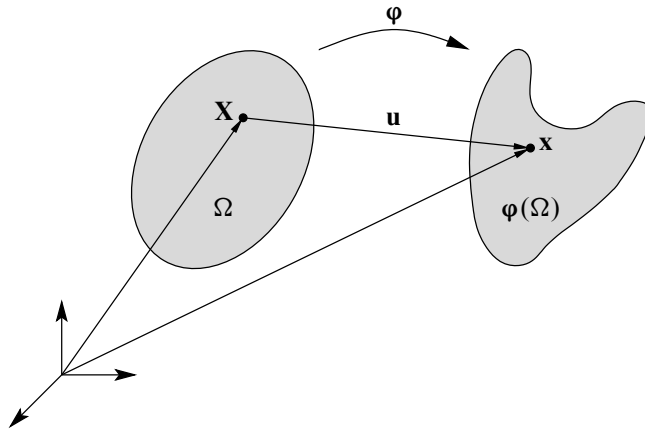


Abbildung 2.1: Deformation eines Körpers

Die Abbildung φ muss so beschaffen sein, dass sie eine physikalisch sinnvolle Veränderung der Ruhelage beschreibt. Vor und nach der Deformation müssen die einzelnen Punkte des Körpers unterscheidbar sein. Dies schließt ein Zusammendrücken des Körpers oder des Teilkörpers auf einen Punkt aus. Daraus resultiert die Forderung der Injektivität⁵ an die Abbildung.

Für den Fall, dass man die Injektivität der Deformation auch auf dem Rand Γ fordert, würde man Verformungen ausschließen, welche zu einer Selbstberührung des Körpers führten. Dies wäre beispielsweise beim Zusammendrücken eines Kreisrings möglich.

Für einen Punkt $\mathbf{X} \in \Omega$ bezeichnet $\mathbf{x} := \varphi(\mathbf{X}) \in \varphi(\Omega)$ den entsprechenden Punkt in der deformierten Konfiguration. Die Bewegung des Körpers ist eine Folge von Konfigurationen $\varphi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Für den Ort des Punktes \mathbf{X} zur Zeit t gilt

$$\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.15)$$

Führt man nun den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ als Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und Ausgangskonfiguration

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.16)$$

⁵Eine Abbildung $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ heißt injektiv, wenn zu jedem Element y der Zielmenge \mathbf{B} höchstens ein Element x der Urbildmenge \mathbf{A} gehört.

ein, so lässt sich Gl. 2.15 folgendermaßen umschreiben:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t). \quad (2.17)$$

Matrizendarstellung. Die Ortsvektoren \mathbf{X} und \mathbf{x} sowie der Verschiebungsvektor \mathbf{u} lassen sich ausdrücken durch eine Linearkombination der Koeffizienten X_i , x_i bzw. u_i und der zugehörigen Basisvektoren \mathbf{e}_i in der Form

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.18)$$

Im Fall kartesischer Basisvektoren kann der Verschiebungsvektor als Spaltenmatrix dargestellt werden, welche nur die Koeffizienten u_i enthält, d.h.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Die Darstellungen verwenden ein kartesisches Koordinatensystem und man erhält die Spaltenmatrizen \mathbf{X} , \mathbf{x} und $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ für die Koeffizienten der Vektoren. Man bezeichnet die Koeffizienten x_i des Ortsvektors \mathbf{x} eines Punktes des deformierten Körpers als *Eulersche Koordinaten*. Die Koeffizienten X_i des Ortsvektors \mathbf{X} beschreiben die Lage des materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration. Diese werden als *materielle Koordinaten* oder *Lagrangesche Koordinaten* bezeichnet.

2.2.3 Lagrangesche vs. Eulersche Betrachtungsweise

Entsprechend den Lagrangeschen Koordinaten X_i und den Eulerschen Koordinaten x_i kann zur eindeutigen Beschreibung der Bewegung der Punkte des Körpers die *Lagrangesche*⁶ oder die *Eulersche*⁷ Betrachtungsweise benutzt werden.

In der Lagrangeschen Beschreibung wird jede Zustandsgröße des materiellen Punktes, wie z.B. die Temperatur T oder der Verschiebungsvektor \mathbf{u} , als Funktion der materiellen Koordinaten X_i und der Zeit aufgefasst und es gilt

$$\begin{aligned} T &= T(X_1, X_2, X_3, t) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t). \end{aligned}$$

Ein Beobachter ist gewissermaßen mit dem Teilchen verbunden und misst die Veränderungen der jeweiligen Zustandsgröße.

Bei der Eulerschen Betrachtungsweise wird demgegenüber jede Zustandsgröße als Funktion der Ortskoordinaten x_i und der Zeit gegeben und es gilt

$$\begin{aligned} T &= T(x_1, x_2, x_3, t) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned}$$

⁶JOSEPH-LOUIS DE LAGRANGE (1736-1813), italienischer Mathematiker.

⁷LEONHARD EULER (1707-1783), schweizer Mathematiker.

Ein Beobachter sitzt sozusagen an einem festen Ort \mathbf{x} und kann zum Zeitpunkt t das Passieren eines Teilchens \mathbf{X} sehen. Man misst Veränderungen, die sich für den Ort dadurch ergeben, dass zu unterschiedlichen Zeiten unterschiedliche materielle Punkte mit unterschiedlichen Eigenschaften am Ort \mathbf{x} sind.

Die Eulersche Beschreibungsweise findet insbesondere in der Fluidmechanik Verwendung. In der Festkörpermechanik wird meistens die Lagrangesche Beschreibung verwendet. Dementsprechend wird im Folgenden nur auf die Lagrangesche Beschreibung zurückgegriffen. Der aktuelle Ort \mathbf{x} und der Verschiebungsvektor \mathbf{u} wird also als Funktion der materiellen Koordinaten X_j aufgefasst und es gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (2.20)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t). \quad (2.21)$$

2.2.4 Deformationsgradient und Verschiebungsgradient

Zur Vorbereitung der Definition einer Verzerrung müssen zunächst die Feldgrößen *Deformationsgradient* und *Verschiebungsgradient* eingeführt werden.

Allgemeingültige Darstellung. Zur lokalen Beschreibung des Deformationsprozesses führt man den *Deformationsgradient* \mathbf{F} ein. Dieser bildet die Tangentenvektoren der Referenz- auf die der Momentankonfiguration ab. Das materielle Linienelement $d\mathbf{X}$ in Ω wird mit dem Linienelement $d\mathbf{x}$ in $\varphi(\Omega)$ verbunden, d.h.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}. \quad (2.22)$$

Die Deformation eines Körpers muss eine eindeutige (umkehrbar eindeutige) Abbildung von Ω auf $\varphi(\Omega)$ sein. Hieraus folgt, dass \mathbf{F} nicht singulär sein darf. Dies bedeutet, dass die zugehörige *Jacobi⁸-Determinante* J der Bedingung

$$J = \det \mathbf{F} \neq 0 \quad (2.23)$$

genügen muss. Ferner ist zu fordern, dass $J > 0$ ist, um Selbstdurchdringungen eines Körpers auszuschließen. Wenn \mathbf{F} nichtsingulär ist, dann existiert die Inverse \mathbf{F}^{-1} und man erhält die Umkehrung der Beziehung (2.22)

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}. \quad (2.24)$$

Mit Hilfe des Deformationsgradienten \mathbf{F} können weitere differentielle Größen transformiert werden. Bezeichnet $d\mathbf{a}$ ein differentielles Flächenelement in der Momentankonfiguration und $d\mathbf{A}$ das Flächenelement in der Referenzkonfiguration, so ist die Transformation zwischen Ω und $\varphi(\Omega)$ durch die *Nansonsche* Formel,

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da = J \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} dA = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A} \quad (2.25)$$

⁸CARL GUSTAV JACOB JACOBI (1804-1851), deutscher Mathematiker.

gegeben. Hierbei bezeichnet \mathbf{n} den Flächennormalenvektor in $\varphi(\Omega)$ und \mathbf{N} den Flächennormalenvektor in Ω . Entsprechend gilt für die Transformation von Volumenelementen

$$dv = J dV. \quad (2.26)$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} lässt sich auch mit $\varphi(\mathbf{X}) = \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})$ in der Form

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi = \nabla(\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X})) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (2.27)$$

darstellen, wobei \mathbf{I} den Einheitstensor und $\nabla\mathbf{u} =: \mathbf{H}$ den *Verschiebungsgradienten* darstellen.

Bemerkung 2.1. *In der Literatur werden \mathbf{F} und \mathbf{H} auch als materieller Deformations- bzw. Verschiebungsgradient bezeichnet. Das Adjektiv materiell bezieht sich dabei auf die Lagrange Betrachtungsweise bzgl. die materiellen Koordinaten X_i . Man beachte, daß es auch räumliche Verzerrungs- und Verschiebungsgradienten gibt, die sich aus der Ableitung nach den räumlichen Koordinaten x_i ergeben. In diesem Skript wird hierauf nicht eingegangen.*

Matrizendarstellung. Die Koeffizienten des Deformationsgradienten \mathbf{F} bezüglich der kartesischen Basis bilden die Matrix \mathbf{F} und werden aus den partiellen Ableitungen $F_{ij} = \partial x_i / \partial X_j$ berechnet. Mit Gl. 2.15 ergibt sich

$$\mathbf{F} := \nabla\varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Die zugehörige Koeffizientenmatrix des Verschiebungsgradienten ist gegeben durch

$$\mathbf{H} = \nabla\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right] = \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & u_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Vollständig ausgeschrieben ergibt sich die Koeffizientenmatrix des Deformationsgradienten zu

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & u_{2,3} \\ u_{3,1} & u_{3,2} & 1 + u_{3,3} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

2.2.5 Verzerrungsmaß und Verzerrungstensor

Als Ausgangspunkt für die Beschreibung der Verzerrungen eines Körpers betrachten wir das *Green⁹-Lagrangesche Verzerrungsmaß* ε_{GL} . Es ist durch die Differenz der Quadrate der infinitesimal kleinen Linienelemente $ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ der verformten

⁹GEORGE GREEN (1793-1841), englischer Mathematiker und Physiker.

Konfiguration $\varphi(\Omega)$ und $dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$ der unverformten Konfiguration Ω bezogen auf $2 dS^2$ in der Form

$$\varepsilon_{GL} := \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dS^2}{dS^2} = \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}} \quad (2.31)$$

definiert.

Beispiel 2.1 (Green-Lagrange Verzerrungsmaß). *Betrachtet wird eine Dehnung des Körpers mit $d\mathbf{x} = (1 + \varepsilon_C) d\mathbf{X}$ sowie $ds = dS \mathbf{n}$ und $d\mathbf{X} = dS \mathbf{n}$. Damit gilt*

$$ds = (1 + \varepsilon_C) dS \quad \text{sowie} \quad \varepsilon_C = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{l - l_o}{l_o} = \frac{\Delta l}{l_o}. \quad (2.32)$$

Mit dem Cauchy Verzerrungsmaß ε_C folgt

$$\varepsilon_{GL} = \varepsilon_C + \frac{1}{2} \varepsilon_C^2 = \frac{ds - dS}{dS} + \frac{1}{2} \left[\frac{ds - dS}{dS} \right]^2. \quad (2.33)$$

Man erkennt die Übereinstimmung des linearen Terms mit dem Cauchy Verzerrungsmaß, das auch lineares Verzerrungsmaß oder Ingenieurverzerrung genannt wird.

Allgemeingültige Darstellung. Für eine allgemeine Deformation gilt zwischen den Linienelementen die Beziehung $d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X}$ und es folgt mit $d\mathbf{X} = dS \mathbf{n}$

$$\varepsilon_{GL} = \frac{1}{2} \frac{\mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}{dS^2} = \mathbf{n} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}. \quad (2.34)$$

Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor ergibt sich zu

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \quad (2.35)$$

und bildet die zentrale Verzerrungsgröße der nichtlinearen Theorie. Mit dem Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}$ und dem Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} := \nabla \mathbf{u} = \mathbf{F} - \mathbf{1}$ lässt sich der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor \mathbf{E} auch in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}), \quad (2.36)$$

bzw.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \quad (2.37)$$

darstellen.

Matrizendarstellung. Die genannten Beziehungen können in eine Matrixnotation übertragen werden und für die kartesischen Koeffizienten E_{ij} folgt

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}). \quad (2.38)$$

Die konkrete Auswertung wird an dieser Stelle an zwei Beispielen erläutert.

Beispiel 2.2 (Ebene Deformation). *Im Fall einer ebenen Deformation (Scheibenproblem) ergibt sich mit $u_3 = 0$ sowie $u_i = \tilde{u}_i(X_1, X_2)$ für $i = 1, 2$ die Koeffizientenmatrix des Deformationsgradienten zu*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & u_{1,2} & 0 \\ u_{2,1} & 1 + u_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Hieraus folgt die Koeffizientenmatrix des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} E_{11} &= u_{1,1} + \frac{1}{2}(u_{1,1}^2 + u_{2,1}^2) \\ E_{22} &= u_{2,2} + \frac{1}{2}(u_{2,2}^2 + u_{1,2}^2) \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) + \frac{1}{2}(u_{1,1} u_{1,2} + u_{2,2} u_{2,1}). \end{aligned} \quad (2.41)$$

Die Komponenten E_{33} , E_{13} und E_{23} ergeben sich im zweidimensionalen Fall identisch zu Null. Die letzten Terme der rechten Seite repräsentieren die nichtlinearen Anteile des Verzerrungstensors.

Eine weitere Dimensionsreduktion führt zu den Beziehungen für den Dehnstab.

Beispiel 2.3 (Eindimensionale Deformation). *Für den Fall einer eindimensionalen Deformation folgt aus den Ergebnissen des Beispiels 2.2 mit der zusätzlichen Annahme $u_2 = 0$ und $u_1 = \tilde{u}_1(X_1)$ die Koeffizientenmatrix des Deformationsgradienten*

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 + u_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

sowie die Koeffizientenmatrix des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \begin{bmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

mit

$$E_{11} = u_{1,1} + \frac{1}{2}u_{1,1}^2. \quad (2.44)$$

2.2.6 Multiplikative Zerlegungen bei großen Deformationen

Im Rahmen der allgemeinen nichtlinearen Theorie kann der Deformationsgradient multiplikativ in physikalisch interpretierbare Faktoren zerlegt werden. Die aufgeführten multiplikativen Zerlegungen werden im Rahmen einer Theorie kleiner Verschiebungen und Verschiebungsgradienten durch eine entsprechende additive Aufspaltung ersetzt, siehe Abschnitt 2.2.11.

2.2.6.1 Polare Zerlegung des Deformationsgradienten

Jede Deformation lässt sich formal als eine Hintereinanderschaltung einer reinen Streckung und einer reinen Drehung darstellen. Nach dem Satz der *polaren Zerlegung* kann der Deformationsgradient \mathbf{F} in der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.45)$$

zerlegt werden. Dabei ist \mathbf{R} ein orthogonaler Drehtensor, d.h. für ihn gilt

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{I}. \quad (2.46)$$

Der Tensor \mathbf{R} beschreibt eine reine Drehung. Ferner bezeichnen \mathbf{U} und \mathbf{V} symmetrische Tensoren, durch welche die Streckung beschrieben wird.

Die polare Zerlegung ist in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

Mit Hilfe des sogenannten *Rechts-Strecktensors* \mathbf{U} und des *Links-Strecktensors* \mathbf{V} lassen sich eine Reihe verschiedener Verzerrungsmaße definieren. Aufgrund der Orthogonalität von \mathbf{R} und der Symmetrie von \mathbf{U} , lässt sich mit Gl. (2.45) der *rechte Cauchy-Green-Tensor*

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \quad (2.47)$$

definieren. Hiermit kann der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor in der Form

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.48)$$

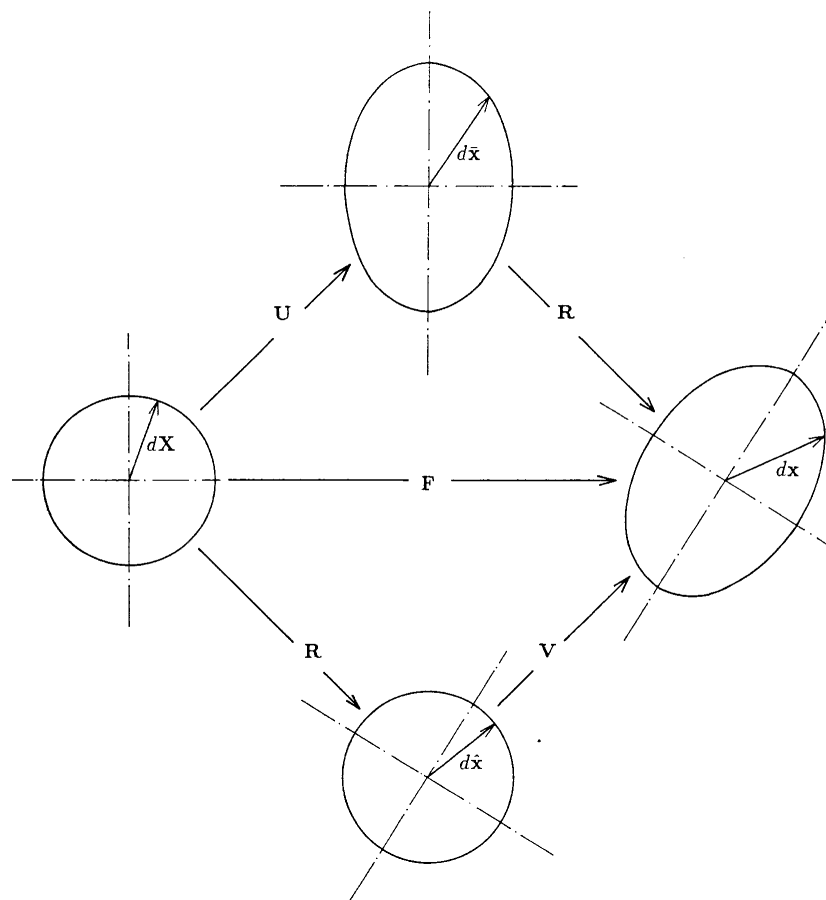
angegeben werden. Für eine Starrkörperrotation mit $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ oder einer Starrkörpertranslation mit $\mathbf{F} = \mathbf{1}$ folgt immer $\mathbf{E} = \mathbf{0}$. Ebenso werden diese Anteile in einer komplexen Deformation durch die Konstruktion von \mathbf{E} eliminiert.

2.2.6.2 Volumetrische und isochore Anteile des Deformationsgradienten

Der materielle Deformationsgradient \mathbf{F} kann multiplikativ in einen volumetrischen Anteil $\mathbf{F}_{\text{vol}} = J^{1/3} \mathbf{1}$ mit $J = \det \mathbf{F}$ und einen isochoren Anteil $\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F}$ mit konstanten Volumen $\det \bar{\mathbf{F}} = 1$ zerlegt werden. Die multiplikative Zerlegung

$$\mathbf{F} = J^{1/3} \bar{\mathbf{F}} \quad (2.49)$$

wird bei der Behandlung großer Deformationen für quasi-inkompressible Materialien wie z.B. Gummi verwendet.

Abbildung 2.2: Polare Zerlegung des materiellen Deformationsgradienten \mathbf{F}

2.2.6.3 Elastische und plastische Anteile des Deformationsgradienten

Für die Behandlung großer elasto-plastischer Deformationen wird die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}_p in der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (2.50)$$

eingeführt.

2.2.7 Kleine Deformationen und linearer Verzerrungstensor

Bei vielen Bauwerken des konstruktiven Ingenieurbaus treten kleine und kaum sichtbare Deformationen unter der Gebrauchslast auf. Die kontinuumsmechanische Beschreibung führt in diesem Fall zu einfacheren Beziehungen.

Allgemeingültige Darstellung. Wir sprechen von *kleinen Deformationen*, wenn die Verschiebung \mathbf{u} in einem Punkt von Ω und der zugehörige Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u}$ sehr klein sind, d.h. wenn

$$\|\mathbf{u}\| \ll 1 \quad \text{und} \quad \delta = \|\mathbf{F} - \mathbf{I}\| = \|\mathbf{H}\| \ll 1. \quad (2.51)$$

Hierbei bezeichnet $\|\mathbf{H}\|$ die Norm des Verschiebungsgradienten, d.h.

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{\mathbf{H} : \mathbf{H}}. \quad (2.52)$$

Benutzen wir δ als eine Art Skalierungsfaktor, so ist

$$\mathbf{H}(\delta) = \delta \cdot \mathbf{H} \quad (2.53)$$

und der Green-Lagrangische Verzerrungstensor \mathbf{E} lässt sich ausdrücken durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\delta) &= \frac{1}{2} \left(\delta \cdot \mathbf{H} + \delta \cdot \mathbf{H}^T + \delta^2 \cdot \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right) \\ &= \delta \cdot \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) + \delta^2 \cdot \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \\ &= \delta \cdot \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) + \mathbf{O}(\delta^2) \\ &= \delta \cdot \hat{\mathbf{e}} + \mathbf{O}(\delta^2). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Für kleine Deformationen, d.h. $\delta \ll 1$, können die quadratischen Anteile vernachlässigt werden ($\mathbf{O}(\delta^2) \approx 0$) und der Green-Lagrangische Verzerrungstensor geht damit über in den *linearen Verzerrungstensor*¹⁰ oder den *Tensor der Ingenieurverzerrungen*

$$\hat{\mathbf{e}} := \frac{1}{2} \left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T \right) = \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \right). \quad (2.55)$$

Der lineare Verzerrungstensor ist symmetrisch und es gilt $\hat{\mathbf{e}}^T = \hat{\mathbf{e}}$.

¹⁰Im Sprachgebrauch wird auch der Begriff *linearisierter Verzerrungstensor* verwendet. Dieser betont dabei die Herleitung von $\hat{\mathbf{e}}$ aus dem (nichtlinearen) Green-Lagrangischen Verzerrungstensor \mathbf{E} durch eine *Linearisierung* bezüglich der Verschiebungen \mathbf{u} an der unverformten Konfiguration Ω .

Matrizendarstellung. Im allgemeinen dreidimensionalen Fall ergeben sich die Koeffizienten des linearen Verzerrungstensors zu

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

Aufgrund der Symmetrie des Verzerrungstensors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$, d.h. $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$, lässt sich der Verzerrungszustand auch mit Hilfe der *Spaltenmatrix der Ingenieurverzerrungen* $\boldsymbol{\varepsilon}$ darstellen. Diese auch *Verzerrungsvektor* genannte Größe ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad 2\varepsilon_{12} \quad 2\varepsilon_{23} \quad 2\varepsilon_{13}]^T. \quad (2.57)$$

Der Verzerrungsvektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ enthält die partiellen Ableitungen

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} u_i = \partial_j u_i. \quad (2.58)$$

Mit Hilfe des Differentialoperators \boldsymbol{D} angewendet auf den Verschiebungsvektor \boldsymbol{u} lässt sich der Verzerrungsvektor in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 u_1 \\ \partial_2 u_2 \\ \partial_3 u_3 \\ \partial_1 u_2 + \partial_2 u_1 \\ \partial_2 u_3 + \partial_3 u_2 \\ \partial_1 u_3 + \partial_3 u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{u} \quad (2.59)$$

ausdrücken. Die Differentialoperatormatrix \boldsymbol{D} ist hierbei gegeben durch

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_3} & \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix}. \quad (2.60)$$

Die Ingenieurverzerrungen werden häufig in der Form

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{D} \boldsymbol{u}} \quad (2.61)$$

dargestellt

2.2.8 Veranschaulichung des linearen Verzerrungstensors

Der lineare Verzerrungstensor kann einerseits aus dem allgemeinen Verzerrungsmaß und der Beschränkung auf kleine Deformationen hergeleitet werden. Andererseits ist es auch möglich, die Verzerrungen ingenieurmäßig zu motivieren und herzuleiten. Vereinfachend wird Veranschaulichung eine zweidimensionale Deformation eines infinitesimal kleinen materiellen Elementes betrachtet. Das undeformierte Rechteck mit den Kantenlängen dx, dy wird zu einem Rhombus deformiert.

2.2.8.1 Tensorielle Normalverzerrungen versus Ingenieurdehnungen

Die Länge \overline{ab} der Ausgangskante $\overline{AB} = dx$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}\overline{ab} &= \sqrt{\left(dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} dx\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2} dx.\end{aligned}\quad (2.62)$$

Für sehr kleine Verschiebungsgradienten mit $\|u_{x,x}\| \ll 1$ und $\|u_{y,x}\| \ll 1$ gilt die Approximation

$$\overline{ab} \approx dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \quad (2.63)$$

und man erhält die Ingenieurdehnung ε_x zu

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{ab} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = u_{x,x}. \quad (2.64)$$

In analoger Form folgen für die y-Richtung sowie die z-Richtung die Beziehungen

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = u_{y,y} \quad \text{sowie} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = u_{z,z}. \quad (2.65)$$

Die *Ingenieurdehnungen* $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ in die drei Koordinatenrichtungen stimmen mit den tensoriellen *Normalverzerrungen* $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$ überein.

2.2.8.2 Tensorielle Schubverzerrungen versus Ingenieurgleitungen

Die *Ingenieurgleitungen* γ messen die Winkeländerung zwischen zwei ursprünglich orthogonalen Kanten und für die Deformation in der x-y-Ebene gilt

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta. \quad (2.66)$$

Aus der Darstellung erkennt man

$$\tan \alpha = \frac{\frac{du_y}{dx} dx}{dx + \frac{\partial du_x}{\partial x} dx} \quad \text{und} \quad \tan \beta = \frac{\frac{du_x}{dy} dy}{dy + \frac{\partial du_y}{\partial y} dy}. \quad (2.67)$$

Für kleine Winkel $\alpha, \beta \ll 1$ und kleine Verschiebungsgradienten mit $\|u_{x,x}\| \ll 1$ und $\|u_{y,x}\| \ll 1$ gilt die Approximation

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad \text{und} \quad \tan \beta \approx \beta \approx \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad (2.68)$$

Unter Berücksichtigung der Vertauschbarkeit von x mit y und u_x mit u_y folgt die Symmetrie und man erhält die Darstellung

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (2.69)$$

In analoger Form folgen für die Ingenieurgleichungen in der y - z -Ebene und der x - z -Ebene die Beziehungen

$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \text{sowie} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (2.70)$$

Der lineare Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ enthält auf den Elementen ε_{ij} außerhalb der Diagonalen die tensoriellen Schubverzerrungen $\varepsilon_{12}, \varepsilon_{23}, \varepsilon_{13}$, die den doppelten Ingenieurgleichungen $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ entsprechen und man erhält beispielsweise für ε_{12} und γ_{xy} die Beziehung

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad \text{bzw.} \quad 2\varepsilon_{12} = \gamma_{xy}. \quad (2.71)$$

2.2.8.3 Der ebene Verzerrungszustand

Bei einer ebenen Deformation mit $u_3 = 0$ und $u_1 = \hat{u}_1(X_1, X_2), u_2 = \hat{u}_2(X_1, X_2)$ ist die explizite Form des linearen Verzerrungstensors gegeben durch die Matrix

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \text{sym.} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= u_{1,1} \\ \varepsilon_{22} &= u_{2,2} \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} (u_{1,2} + u_{2,1}). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Komponenten $\varepsilon_{33}, \varepsilon_{13}$ und ε_{23} sind im zweidimensionalen Fall identisch Null.

2.2.9 Verträglichkeitsbedingungen für die linearen Verzerrungen

Die linearen Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ können gemäß $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}$ aus gegebenen Verschiebungsfunktionen \mathbf{u} durch die entsprechenden partiellen Ableitungen berechnet werden. In diesem Abschnitt wird untersucht, ob es auch möglich ist, von den gegebenen Verzerrungen $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ auf die Verschiebungen \mathbf{u} zu schließen.

Die linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.74)$$

ergeben ein System von sechs gekoppelten partiellen Differentialgleichungen zur Bestimmung der drei unabhängigen Verschiebungen u_i in einem Punkt. Um eine eindeutige Zuordnung zwischen den sechs Verzerrungen und den drei Verschiebungen in jedem Punkt zu erreichen, müssen $6 - 3 = 3$ *Verträglichkeitsbedingungen*, auch *Integrabilitätsbedingungen* oder *Kompatibilitätsbedingungen* genannt, von den sechs Verzerrungen erfüllt werden. Damit verbleiben nur noch drei unabhängige Verzerrungen und die drei Verschiebungen sind hieraus berechenbar.

Die Verträglichkeitsbedingungen für die sechs linearen Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen werden durch Elimination der Verschiebungsableitungen aus Gleichung (2.74) gewonnen. Hierzu betrachten wir die Gleichung (2.74) und bilden die partielle Ableitung nach X_k

$$\varepsilon_{ij,k} = \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik}) \quad (2.75)$$

sowie die durch die Permutation der Indizes entstehenden Gleichungen

$$\varepsilon_{ik,j} = \frac{1}{2}(u_{i,kj} + u_{k,ij}) , \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_{jk,i} = \frac{1}{2}(u_{j,ki} + u_{k,ji}) . \quad (2.77)$$

Durch geeignete Addition und Subtraktion der Gleichungen (2.75), (2.76) und (2.77) erhalten wir mit der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ein Differentialgleichungssystem für die unbekanntenen Verschiebungen u_i

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j} &= \frac{1}{2}(u_{i,jk} + u_{j,ik} + u_{j,ki} + u_{k,ji} - u_{i,kj} - u_{k,ij}) \\ &= \frac{1}{2}(u_{j,ik} + u_{j,ki}) = u_{j,ik} . \end{aligned} \quad (2.78)$$

Aus der erneuten Forderung vertauschbarer partieller Ableitungen

$$(u_{j,ik})_{,l} = (u_{j,il})_{,k} \quad (2.79)$$

ergibt sich für das Differentialgleichungssystem (2.78) die Bedingung

$$(\varepsilon_{ij,k} + \varepsilon_{jk,i} - \varepsilon_{ik,j})_{,l} = (\varepsilon_{ij,l} + \varepsilon_{jl,i} - \varepsilon_{il,j})_{,k} , \quad (2.80)$$

das sich in die *St. Venantschen Kompatibilitätsbedingungen*

$$\boxed{\varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,li} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0} \quad (2.81)$$

umformen läßt. Die Gleichung (2.81) stellt 81 Gleichungen dar, von denen wegen der Symmetrieeigenschaften jedoch nur die folgenden 6 Gleichungen wesentlich sind:

$$2 \varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} \quad (2.82)$$

$$2 \varepsilon_{23,23} = \varepsilon_{22,33} + \varepsilon_{33,22} \quad (2.83)$$

$$2 \varepsilon_{31,31} = \varepsilon_{33,11} + \varepsilon_{11,33} \quad (2.84)$$

$$\varepsilon_{11,23} = (\varepsilon_{12,3} + \varepsilon_{31,2} - \varepsilon_{23,1}),1 \quad (2.85)$$

$$\varepsilon_{22,31} = (\varepsilon_{23,1} + \varepsilon_{12,3} - \varepsilon_{31,2}),2 \quad (2.86)$$

$$\varepsilon_{33,12} = (\varepsilon_{31,2} + \varepsilon_{23,1} - \varepsilon_{12,3}),3 \quad (2.87)$$

Es soll jetzt gezeigt werden, daß nur noch drei der sechs Bedingungen unabhängig sind. Hierzu leiten wir (2.85) nochmals partiell nach X_2 ab und erhalten

$$\varepsilon_{11,232} = \varepsilon_{12,312} + \varepsilon_{31,212} - \varepsilon_{23,112} \quad (2.88)$$

Ebenso ergibt sich aus der Ableitung von (2.86) nach X_1

$$\varepsilon_{22,311} = \varepsilon_{23,121} + \varepsilon_{12,321} - \varepsilon_{31,221} \quad (2.89)$$

Durch Einsetzen von (2.89) in (2.88) und Vertauschen der Reihenfolge der partiellen Ableitungen folgt

$$2\varepsilon_{12,123} = \varepsilon_{11,223} + \varepsilon_{22,113} \quad (2.90)$$

und damit

$$(2\varepsilon_{12,12}),3 = (\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11}),3 \quad (2.91)$$

d. h. die partielle Ableitung der Gleichung (2.82) nach X_3 . Damit sind die Gleichungen (2.85) und (2.86) von Gleichung (2.82) abhängig. Analog kann mit den übrigen Gleichungen verfahren werden. Hieraus erkennt man, daß nur drei Verträglichkeitsbedingungen unabhängig und hinreichend sind.

Die ausgewählten wesentlichen Gleichungen können in der Reihenfolge (2.84), (2.83), (2.82) in einer Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} & 0 & -\partial_{23} & 0 \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} & 0 & 0 & -\partial_{31} \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 & -\partial_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (2.92)$$

geschrieben werden. Die Koeffizientenmatrix wird mit \mathbf{D}^{*T} bezeichnet und es gilt somit in symbolischer Matrixschreibweise

$$\mathbf{D}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \quad (2.93)$$

2.2.10 Invarianten und Eigenwerte

Der Vorteil einer tensoriellen Darstellung besteht darin, daß sie allgemeingültig ist und somit für alle speziellen Basissysteme ausgewertet werden kann. Unabhängig hiervon existieren jedoch physikalisch motivierte Hauptwerte und Hauptachsen, deren Berechnung und Interpretation an dieser Stelle am Beispiel des linearen Verzerrungstensors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ erläutert wird. Die absolute Tensorarstellung wird unmittelbar durch die Koeffizientendarstellung bezüglich einer kartesischen Basis veranschaulicht.

2.2.10.1 Eigenwerte des linearen Verzerrungstensors

Die *Invarianten* des Verzerrungstensors sind Eigenschaften von $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, die unabhängig von der gewählten Darstellung in einem Koordinatensystem immer unverändert bleiben, also *invariant* sind. Zweistufige Tensoren, die über den dreidimensionalen Vektorraum V definiert sind, besitzen drei Invarianten. Die Invarianten sind in absoluter Tensorschreibweise, in Matrixschreibweise oder in Koeffizientenschreibweise bezüglich einer kartesischen Basis angegeben

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} , \\
 I_2 &= \frac{1}{2} \left([\text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})]^2 - \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2) \right) = \frac{1}{2} \left([\text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})]^2 - \text{tr}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2) \right) \\
 &= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{13}^2 , \\
 I_3 &= \det(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \det(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\
 &= \varepsilon_{11} (\varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{23}) \\
 &\quad - \varepsilon_{12} (\varepsilon_{12} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23} \varepsilon_{31}) \\
 &\quad + \varepsilon_{13} (\varepsilon_{12} \varepsilon_{23} - \varepsilon_{22} \varepsilon_{31}) .
 \end{aligned} \tag{2.94}$$

Hierbei werden die Operatoren für die *Spur* tr und die *Determinante* \det auf den Tensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ beziehungsweise die Matrix $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ angewendet.

2.2.10.2 Hauptachsenproblem

Das *Eigenwertproblem* oder auch *Hauptachsenproblem* für den linearen Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ untersucht die Frage, ob es *Eigenvektoren* oder *Hauptrichtungen* \mathbf{n}_i gibt, in deren Richtung nur eine Dehnung auftritt, also

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \tag{2.95}$$

gilt. Die *Eigenwerte* oder *Hauptwerte* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ entsprechen physikalisch den Dehnungen einer Faser in Richtung der Eigenvektoren \mathbf{n}_i . Sie sind die Nullstellen des *charakteristischen Polynoms*

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \tag{2.96}$$

und ergeben in der Form

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \\ I_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Mit den ermittelten Hauptwerten lassen sich dann die Hauptrichtungen \mathbf{n}_i über die Lösung der Beziehung

$$(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \lambda_i \mathbf{1}) \mathbf{n}_i = \mathbf{0} \quad (2.98)$$

berechnen. Die Hauptrichtungen bilden eine orthonormale Basis $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ und der Verzerrungstensor kann in der Form

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.99)$$

dargestellt werden.

Bemerkung 2.2. Die eingeführte polare Zerlegung $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ kann mit dieser Zerlegung einfach erläutert werden, da der orthogonale Tensor \mathbf{R} eine Drehung der Hauptachsen beschreibt und die Strecktensoren \mathbf{U} , \mathbf{V} die Dehnung in dieser Richtung vor bzw. nach der Drehung angeben.

2.2.11 Additive Zerlegungen bei kleinen Deformationen

Die in Abschnitt 2.2.6 aufgeführten multiplikativen Zerlegungen des Deformationsgradienten \mathbf{F} im Rahmen der allgemeinen nichtlinearen Theorie werden für kleine Deformationen in additive Zerlegungen des linearen Verzerrungstensors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ überführt. Die Details des Linearisierungsprozesses bleiben an dieser Stelle verborgen, aber die resultierenden Beziehungen der linearen Theorie werden angegeben.

2.2.11.1 Zerlegung in Verzerrungen und Drehungen

Analog zur multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten \mathbf{F} kann der Verschiebungsgradient \mathbf{H} für kleine Deformationen additiv in seine Verzerrungs- und Rotationsanteile zerlegt werden.

Allgemeingültige Darstellung. Der Verschiebungsgradient $\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}$ kann in einen symmetrischen Anteil $\text{sym}\{\nabla \mathbf{u}\}$ und schief-symmetrischen (antimetrischen) Anteil $\text{skw}\{\nabla \mathbf{u}\}$ zerlegt werden. Es gilt

$$\nabla \mathbf{u} = \text{sym}\{\nabla \mathbf{u}\} + \text{skw}\{\nabla \mathbf{u}\} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T). \quad (2.100)$$

Der lineare Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ entspricht damit dem symmetrischen Anteil des Verschiebungsgradienten, d.h.

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \text{sym}\{\nabla \mathbf{u}\}. \quad (2.101)$$

Der antisymmetrische Anteil bildet den *infinitesimalen Drehtensor*

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T) = \text{skw}\{\nabla \mathbf{u}\}, \quad (2.102)$$

dem ein *achsialer Vektor* \mathbf{w} zugeordnet ist.

Matrizendarstellung. Der antisymmetrische Drehtensor $\hat{\boldsymbol{\omega}} = -\hat{\boldsymbol{\omega}}^T$ und der zugehörige achsiale Vektor \mathbf{w} besitzen in einem kartesischen Koordinatensystem die Koeffizientenmatrizen

$$\hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= -\omega_{21} = \frac{1}{2} (u_{1,2} - u_{2,1}) \\ \omega_{23} &= -\omega_{32} = \frac{1}{2} (u_{2,3} - u_{3,2}) \\ \omega_{31} &= -\omega_{13} = \frac{1}{2} (u_{3,1} - u_{1,3}) \end{aligned} \quad (2.103)$$

und der Beziehung

$$\omega_{ij} = e_{ijk} w_k \quad \text{sowie} \quad w_i = e_{ijk} \omega_{jk} \quad (2.104)$$

zwischen den Koeffizienten der Drehtensors und des achsialen Vektors. Hierbei ist e_{ijk} das *Permutationssymbol* und bedeutet

$$e_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine Permutation von } (1, 2, 3) \text{ ist,} \\ -1 & \text{falls } (i, j, k) \text{ eine Permutation von } (3, 2, 1) \text{ ist,} \\ 0 & \text{falls zwei oder drei gleiche Indizes auftreten.} \end{cases} \quad (2.105)$$

2.2.11.2 Zerlegung in Kugeltensor und Deviator

Die additive Zerlegung des linearen Verzerrungstensors in volumen- sowie gestaltsändernde Anteile ist für mechanische Verständnis des Materialverhaltens hilfreich.

Das Maß für die Volumenänderung der nichtlinearen Theorie $J = \det \mathbf{F}$ wird im Rahmen einer Linearisierung in die linearisierte Form $\text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ überführt. Hierbei bezeichnet der Operator tr die *Spur* eines Tensors.

Der lineare Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ kann somit additiv in einen volumetrischen Anteil (Kugeltensor) $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vol}}$ und einen deviatorischen Anteil (Deviator) $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}}$ mit

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{vol}} + \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{dev}} = \frac{1}{3} (\text{tr} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{1} + \text{dev} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.106)$$

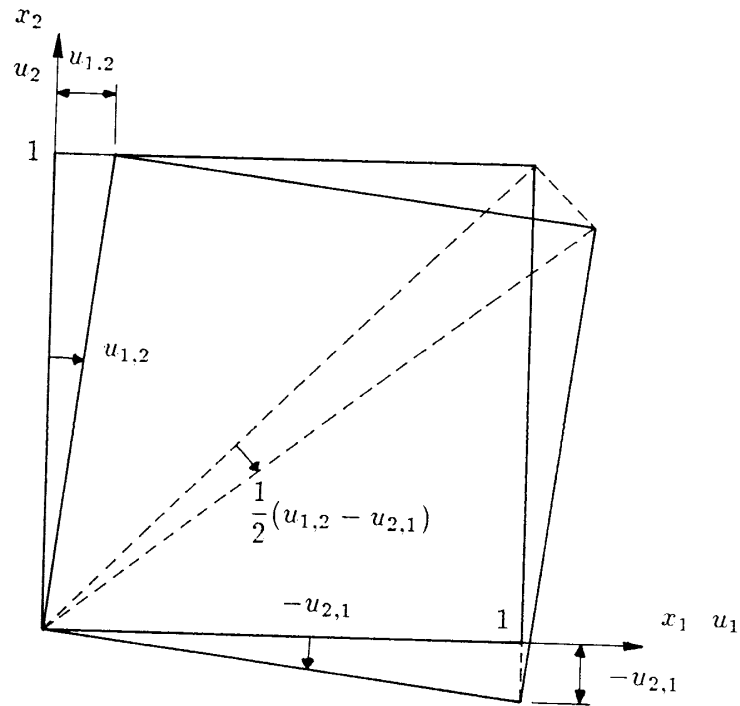


Abbildung 2.3: Beispiel für eine lineare Drehung

zerlegt werden. Dabei meint

$$\delta = \frac{\Delta V}{V} = \text{tr}(\hat{\epsilon}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad (2.107)$$

die *Volumendehnung* oder *Dilatation* und

$$\epsilon_m = \frac{\epsilon_{kk}}{3} = \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}}{3} = \frac{1}{3} \text{tr}(\hat{\epsilon}) \quad (2.108)$$

ist die *mittlere Dehnung*. Damit können die Koeffizienten des Verzerrungstensors ϵ_{ij} in der Form

$$\epsilon_{ij} = \frac{\epsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} + e_{ij} \quad (2.109)$$

geschrieben werden, wobei die Koeffizienten e_{ij} des Deviators die *Gestaltsänderung* beschreiben.

2.2.11.3 Zerlegung in elastische und plastische Anteile

Die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in elastische und plastische geht im Rahmen einer geometrisch linearen Theorie ebenfalls in eine additive Aufteilung von elastischen und plastischen Anteilen des linearen Verzerrungstensors über. An dieser Stelle können weitere Details nicht dargestellt werden.

2.3 Spannungen und Gleichgewichtsaussagen

Im Rahmen der allgemeingültigen nichtlinearen Theorie werden die Belastungen und Spannungen am verformten Körper $\varphi(\Omega)$ betrachtet und es wird das Gleichgewicht für diesen deformierten Körper formuliert. Durch die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Linearisierung erfolgt eine Vereinfachung der Betrachtungen am unverformten Körper Ω . Alle in diesem Abschnitt eingeführten Größen beziehen sich auf den unverformten Körper Ω und damit wird das Gleichgewicht auch für den unverformten Körper gefordert.

2.3.1 Kraft- und Spannungsvektoren

Auf eine Struktur wirken verschiedene Arten äußerer Kräfte. Volumenkräfte \mathbf{b} wirken als volumenmäßig verteilte Kräfte auf die Partikel im Inneren der Struktur Ω . Flächenkräfte $\bar{\mathbf{t}}$ treten auf der Körperoberfläche bzw. über Teilflächen auf, d.h. auf dem Rand Γ_N , siehe Abb. 2.4. Ferner treten bei dynamischen Beanspruchungen noch Trägheitskräfte $\rho \ddot{\mathbf{x}}$ für alle Partikel der Struktur auf. Diese werden jedoch im Rahmen dieses Skriptes vernachlässigt, da ausschließlich statische (zeitunabhängige) Probleme betrachtet werden.

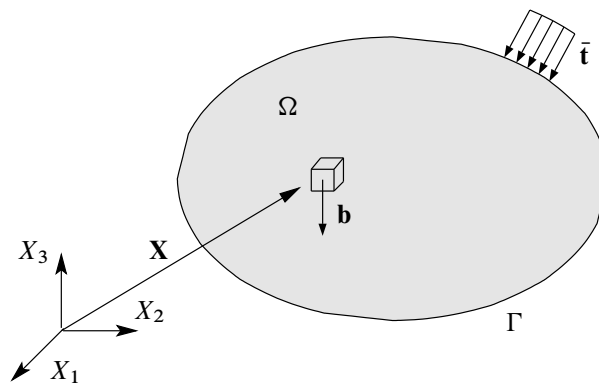


Abbildung 2.4: Volumen- und Flächenkräfte

Aus den äußeren Kräften resultieren im Körper innere Kräfte, welche die Wechselwirkung zwischen benachbarten Körperpartikeln beschreiben. Diese inneren Kräfte

wirken als Flächenkräfte oder *Spannungen* auf gedachte Schnitte im Körperinnern und können wie nachfolgend dargestellt als *Spannungsvektor* definiert werden. Betrachtet wird eine äußere Kraft $\Delta \mathbf{f}$, die auf der Fläche ΔA angreift. Der Spannungsvektor \mathbf{t} ist dann definiert durch

$$\mathbf{t} := \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A}, \quad (2.110)$$

wobei vorausgesetzt wird, dass der Grenzwert existiert. Ferner wird angenommen, dass von der Schnittfläche nur Kräfte und keine Momente übertragen werden. Die Berücksichtigung von Momenten auf infinitesimalen Schnitten kann durch so genannte Momentenspannungen innerhalb der *Cosserat¹¹ Theorie* erfolgen, auf welche an dieser Stelle jedoch nicht eingegangen werden soll.

Die eingeprägte Oberflächenspannung $\bar{\mathbf{t}}$ muß auf dem Rand Γ_N der dort auftretenden Schnittspannung \mathbf{t} entsprechen, d.h. $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$.

Die Volumenkraft \mathbf{b} und der Spannungsvektor \mathbf{t} werden in kartesischen Koordinaten durch die Spaltenmatrizen

$$\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^T \quad (2.111)$$

beschrieben.

2.3.2 Spannungstensor

Der Spannungsvektor \mathbf{t} hängt wesentlich von der Wahl der Schnittfläche ab. Gesucht ist eine von der Schnittführung unabhängige Darstellung der Spannungen im Körper.

2.3.2.1 Das Cauchy Fundamentallemma

Das *Cauchy Fundamentallemma* stellt die bereits in der *Technischen Mechanik* verwendete Beziehung zwischen den Schnittkräften allgemeingültig dar. Demnach sind die bei einem gedachten Schnitt durch den Körper mit der Schnittnormalen \mathbf{n} auftretenden Spannungsvektoren am positiven sowie am negativen Schnittufer entgegengesetzt gleich sind. Es gilt also für jeden Punkt der Schnittfläche

$$\mathbf{t}(-\mathbf{n}) = -\mathbf{t}(\mathbf{n}). \quad (2.112)$$

Die Spannungen an beiden Ufern einer Schnittfläche sind entgegengesetzt gerichtet und betragsmäßig gleich groß.

2.3.2.2 Das Cauchy Spannungstheorem

Die lineare Beziehung zwischen Spannungsvektor \mathbf{t} und Schnittfläche \mathbf{n} wird durch den *Spannungstensor* $\hat{\sigma}$ hergestellt.

¹¹Gebrüder Cosserat: EUGÈNE COSSERAT (1866-1931), französischer Mathematiker und Astronom. FRANCOIS COSSERAT (1852-1914), französischer Mathematiker und Ingenieur.

Allgemeingültige Darstellung. Der grundlegenden Zusammenhang zwischen dem Spannungszustand in einem Körperpunkt und die Darstellung als Spannungsvektor in einem (gedachten) Schnitt wird durch das *Cauchy¹² Theorem¹³*

$$\boxed{\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}} \quad (2.113)$$

angegeben. Der Spannungsvektor \mathbf{t} auf jedem Punkt des Randes kann demnach aus dem Spannungstensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ und dem äußeren Normalenvektor \mathbf{n} berechnet werden.

Bemerkung 2.3. Durch die Linearisierung wird aus dem Cauchy Spannungstensor, der auf der verformten Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}(\Omega)$ definiert ist, der linearisierte Spannungstensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. In diesem Fall beziehen sich das Flächenelement ΔA sowie die Normale \mathbf{n} auf die unverformte Lage Ω .

Matrizendarstellung. Die Koeffizienten $\hat{\sigma}_{ij}$ des Spannungstensors $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems sind in der Darstellung 2.5 angegeben. Dabei bezeichnet der erste Index die Richtung der Spannung und der zweite Index kennzeichnet die Richtung der Flächennormale, da mit Gleichung (2.113) auch $\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}$ gelten soll. Die Beziehung zwischen den tensoriellen Spannungskoeffizienten $\hat{\sigma}_{ij}$ und den klassischen Ingenieurspannungen wird in Abschnitt 2.3.2.4 diskutiert.

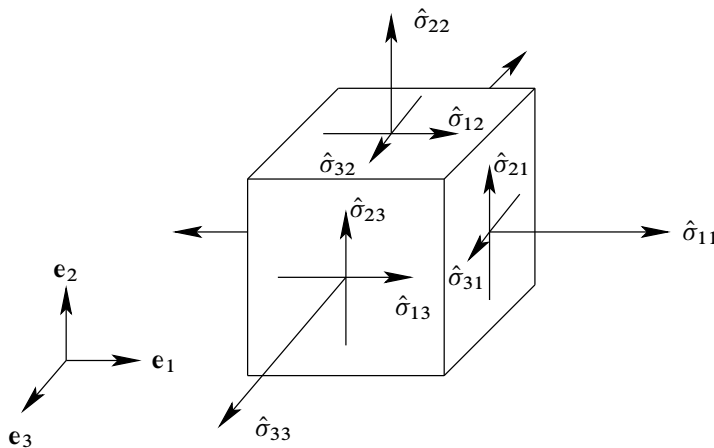


Abbildung 2.5: Tensorielle Spannungskoeffizienten am Volumenelement

Die Koeffizientenmatrix des linearen Spannungstensors ist gegeben durch

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \hat{\sigma}_{23} \\ \hat{\sigma}_{31} & \hat{\sigma}_{32} & \hat{\sigma}_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.114)$$

¹²AUGUSTIN LOUIS CAUCHY (1789-1859), französischer Mathematiker.

¹³Es gibt in der Literatur mehrere Aussagen, die nach Cauchy benannt werden. Genauer spricht man dann vom *Cauchy Spannungs-Theorem*.

Der Spannungsvektor \mathbf{t} und der zugehörige Normalenvektor \mathbf{n} lauten

$$\mathbf{t} = [t_1 \quad t_2 \quad t_3]^T \quad \text{ sowie } \quad \mathbf{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3]^T \quad (2.115)$$

und es gilt somit im allgemeinen 3D-Fall

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11}n_1 + \hat{\sigma}_{12}n_2 + \hat{\sigma}_{13}n_3 &= t_1 \\ \hat{\sigma}_{21}n_1 + \hat{\sigma}_{22}n_2 + \hat{\sigma}_{23}n_3 &= t_2 \\ \hat{\sigma}_{31}n_1 + \hat{\sigma}_{32}n_2 + \hat{\sigma}_{33}n_3 &= t_3 \end{aligned} \quad (2.116)$$

oder kompakter

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} & \hat{\sigma}_{12} & \hat{\sigma}_{13} \\ \hat{\sigma}_{21} & \hat{\sigma}_{22} & \hat{\sigma}_{23} \\ \hat{\sigma}_{31} & \hat{\sigma}_{32} & \hat{\sigma}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

bzw.

$$\boxed{\hat{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{t}}. \quad (2.118)$$

Beweis des Cauchy Theorems für den zweidimensionalen Fall. Der Zusammenhang zwischen den Spannungskomponenten t_i in einem Schnitt \mathbf{n} und den inneren Spannungen $\hat{\sigma}_{ij}$ im betrachteten Körperpunkt soll exemplarisch an der zweidimensionalen Situation hergeleitet werden, siehe Abb. 2.6.

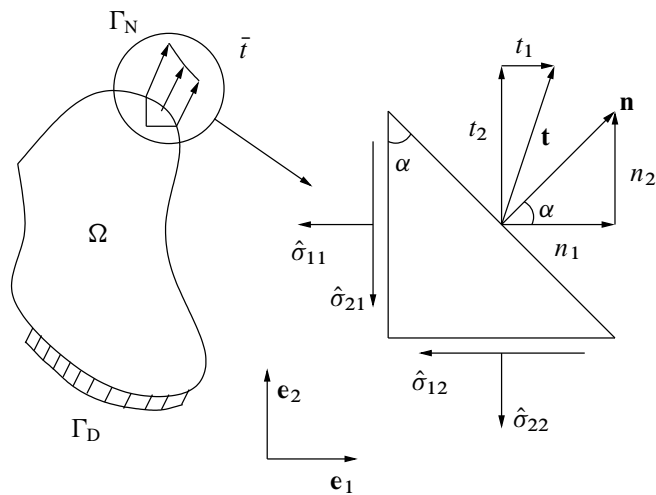


Abbildung 2.6: Gleichgewicht am Schnitt

Hierzu wird das Kräftegleichgewicht in jede Koordinatenrichtung aufgestellt. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} dX_2 dX_3 + \hat{\sigma}_{12} dX_1 dX_3 &= t_1 dS dX_3 \\ \hat{\sigma}_{21} dX_2 dX_3 + \hat{\sigma}_{22} dX_1 dX_3 &= t_2 dS dX_3.\end{aligned}\quad (2.119)$$

Nach der Division durch $dX_3 dS$ erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} \frac{dX_2}{dS} + \hat{\sigma}_{12} \frac{dX_1}{dS} &= t_1 \\ \hat{\sigma}_{21} \frac{dX_2}{dS} + \hat{\sigma}_{22} \frac{dX_1}{dS} &= t_2.\end{aligned}\quad (2.120)$$

Wenn man die Ähnlichkeit der Dreiecke $\Delta[n_1 n_2 \|\mathbf{n}\|]$ und $\Delta[dX_2 dX_1 dS]$ ausnutzt, erhält man mit $\|\mathbf{n}\| = 1$ die Beziehungen

$$\sin \alpha = \frac{dX_1}{dS} = \frac{n_2}{\|\mathbf{n}\|} = n_2 \quad \text{und} \quad \cos \alpha = \frac{dX_2}{dS} = \frac{n_1}{\|\mathbf{n}\|} = n_1. \quad (2.121)$$

Für das Gleichungssystem folgt

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{11} n_1 + \hat{\sigma}_{12} n_2 &= t_1 \\ \hat{\sigma}_{21} n_1 + \hat{\sigma}_{22} n_2 &= t_2\end{aligned}\quad (2.122)$$

bzw. in Indeschreibweise

$$\hat{\sigma}_{ij} n_j = t_i. \quad (2.123)$$

Es gilt also $\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \mathbf{t}$, wobei die tensorielle Notation für die Spannungskoeffizienten verwendet wird.

2.3.2.3 Klassische Ingenieurnotation für die Spannungen

Die traditionelle Bezeichnung der Normal- und Schubspannungen in rechtwinkligen Schnitten entlang der Koordinatenachsen ist in Abbildung 2.7 dargestellt. Die *Normalspannungen* werden als $\sigma_x \equiv \sigma_{xx}$, $\sigma_y \equiv \sigma_{yy}$ und $\sigma_z \equiv \sigma_{zz}$ geschrieben und weisen in Richtung der Flächennormalen. Die *Schubspannungen* wirken parallel zu den Schnittflächen und werden mit τ_{xy} , τ_{yx} und τ_{yz} , τ_{zy} sowie τ_{zx} , τ_{xz} bezeichnet, wobei der erste Index die Richtung der Flächennormale angibt und der zweite Index die Richtung der Schubspannung kennzeichnet.

2.3.2.4 Vergleich der Notationen und Vereinbarungen

Der Vergleich der Abbildungen 2.5 und 2.7 zeigt, dass sich die Reihenfolge und Bedeutung der Indizes zwischen der tensoriellen und der klassischen Notation verändert hat. Die klassische Notation hat eine lange Tradition und wird weiterhin überwiegend in der Ingenieurliteratur verwendet. Demgegenüber ist die Tensornotation von der modernen Mathematik und der Praxis geprägt, das Cauchy-Theorem als Tensor-Vektor-Produkt in der Form $\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}$ zu schreiben. Diese Darstellung wird besonders in der Literatur zur *Kontinuumsmechanik* und zur *numerischen Mechanik* verwendet.

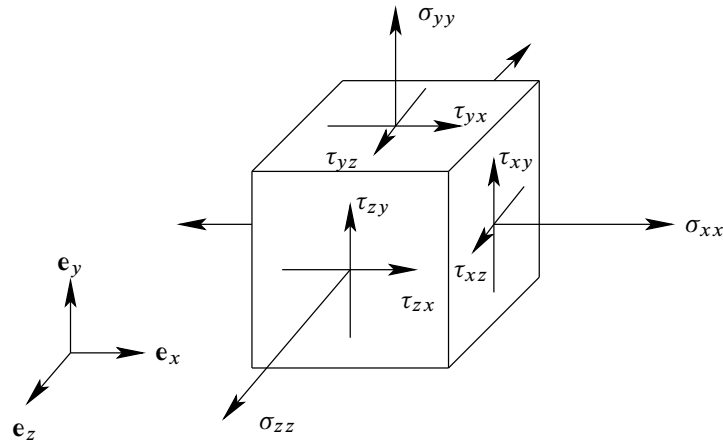


Abbildung 2.7: Normal- und Schubspannungen am Volumenelement

Der Konflikt wird allerdings durch das Momentengleichgewicht, siehe hierzu Abschnitt 2.3.3.1, gemildert, dass zur *Symmetrie des Spannungstensors* $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T$ und somit die Gleichheit der Spannungskoeffizienten $\hat{\sigma}_{ij} = \hat{\sigma}_{ji}$ führt. In der klassischen Ingenieurnotation bedeutet dieses die Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ und $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ sowie $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ an orthogonalen Schnitten.

In dieser Darstellung verwenden wir die Spannungskoeffizienten σ_{ij} des Spannungstensors $\hat{\sigma}$ bzw. der Spannungsmatrix $\hat{\sigma}$ und vereinbaren die folgenden Gleichheit

$$\begin{aligned}\sigma_{12} = \sigma_{21} = \hat{\sigma}_{12} = \hat{\sigma}_{21} = \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} = \hat{\sigma}_{23} = \hat{\sigma}_{32} = \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} = \hat{\sigma}_{31} = \hat{\sigma}_{13} = \tau_{zx} = \tau_{xz} .\end{aligned}\quad (2.124)$$

Damit gilt für die Koeffizientenmatrix $\hat{\sigma}$ und das Cauchy-Theorem die Darstellung

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} . \quad (2.125)$$

Analog zur tensoriellen Notation beschreibt der erste Index die Richtung der Spannung und der zweite Index die Richtung der Normalen. Alle Gleichungen in Indexschreibweise werden auf dieser Grundlage dargestellt. Der Leser sollte sich für den Vergleich der Formeln dieser Ausarbeitung mit Darstellungen in der Literatur die jeweils gültige Notation berücksichtigen. Beispielsweise kann das Cauchy-Theorem auch in der Form

$$\sigma_{ji} n_j = b_i \quad (2.126)$$

dargestellt werden. Man erkennt an der Wahl der Indizes, dass in diesem Fall die klassische Ingenieurnotation (Normalenrichtung, Spannungsrichtung) verwendet wird.

Die *Voigtsche*¹⁴ *Notation* erleichtert die Schreibweise für symmetrische Tensoren in der Kontinuumsmechanik. Aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors $\hat{\sigma}$, d.h. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, lässt sich der Spannungszustand auch durch die Spaltenmatrix σ der Spannungskoeffizienten

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{13}]^T \quad (2.127)$$

darstellen.

Bemerkung 2.4. Die Spaltenmatrix der Spannungskoeffizienten σ wird oftmals verkürzend als „Spannungsvektor“ bezeichnet. Der „Spannungsvektor“ $\sigma \in \mathbb{R}^3$ darf jedoch nicht mit den Spannungsvektor $\mathbf{t} \in \mathbb{E}^3$ gemäß $\mathbf{t} = \hat{\sigma} \mathbf{n}$ verwechselt werden.

2.3.3 Das lokale Kräfte- und Momentengleichgewicht

In diesem Abschnitt wird die lokale Kräftegleichgewichtsbedingung, das ist die Differentialgleichung für die Spannungen, hergeleitet. Die Darstellung erfolgt im Rahmen der bereits durchgeführten Linearisierung, d.h. es handelt sich um das Gleichgewicht am unverformten System Ω .

2.3.3.1 Das Momentengleichgewicht

Das Momentengleichgewicht aller an einem Körper angreifenden Kräfte führt nach längeren Umformungen der Beziehungen in tensorieller Schreibweise auf die Symmetrie des Spannungstensors $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T$. Für die Details, die den Umformungen des Kräftegleichgewichts im nächsten Abschnitt entsprechen, wird auf die Literatur verwiesen. Nach Wahl einer kartesischen Basis folgt die Gleichheit der Spannungskoeffizienten $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

2.3.3.2 Das Kräftegleichgewicht

Die *Newtonschen*¹⁵ *Grundgesetze*¹⁶ bilden die Grundlage der klassischen Mechanik.

- Lex prima oder das Trägheitsprinzip: *Ein Körper verharrt im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Translation, sofern er nicht durch einwirkende Kräfte zur Änderung seines Zustands gezwungen wird.*
- Lex secunda oder das Aktionsprinzip: *Die Änderung der Bewegung einer Masse ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.*
- Lex tertia oder das Reaktionsprinzip: *Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt*

¹⁴WOLDEMAR VOIGT (1850-1919), deutscher Physiker.

¹⁵ISAAC NEWTON (1643-1727), englischer Naturforscher.

¹⁶Die Grundgesetze der Bewegung wurden im Jahr 1687 in Newtons Hauptwerk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* oder *Mathematische Prinzipien der Naturphilosophie* formuliert.

eine gleich große, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A (*reactio*).

Eine ausführliche Diskussion müssen wir der Literatur überlassen. Im Rahmen der vorgenommenen Einschränkungen, das ist die statische Betrachtung kleiner Deformationen, erhalten wir die globale Kräftegleichgewichtsbedingung.

Allgemeingültige Darstellung. Aus den obigen Grundgesetzen ergibt sich für das Kräftegleichgewicht, d.h. dass die Summe aller äußeren Kräfte verschwinden muss,

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = 0. \quad (2.128)$$

Unter Verwendung des Cauchy Theorems $\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ und des Divergenztheorems

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \, d\Gamma = \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega \quad (2.129)$$

folgt

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \, d\Omega = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}) \, d\Omega = 0. \quad (2.130)$$

Mit der hinreichenden Stetigkeit gilt die Äquivalenz

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b}) \, d\Omega = 0 \quad \iff \quad \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega. \quad (2.131)$$

Damit folgt die lokale Gleichgewichtsbedingung in der Form

$$\boxed{\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}}. \quad (2.132)$$

Matrizendarstellung. Die Matrizendarstellung basiert auf den tensoriellen Spannungskoeffizienten bezüglich einer kartesischen Basis. Die Divergenz des Spannungstensors $\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ geht über in die Spaltenmatrix

$$\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} \end{bmatrix}. \quad (2.133)$$

Mit Hilfe der Differentialoperatormatrix \mathbf{D} aus Gl. (2.60) kann die Divergenz des Spannungstensors $\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ ausgedrückt werden durch den Differentialoperator angewendet auf den Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$. Es gilt

$$\begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_1 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + \sigma_{13,3} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} \\ \sigma_{31,1} + \sigma_{32,2} + \sigma_{33,3} \end{bmatrix} = \mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (2.134)$$

Damit lässt sich die lokale Gleichgewichtsbedingung (2.132) mit Hilfe des Differentialoperator \mathbf{D} und des Spannungsvektor $\boldsymbol{\sigma}$ in der Form

$$\boxed{\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0}} \quad (2.135)$$

darstellen.

Beispiel 2.4. Wir betrachten ein zweidimensionale Scheibenproblem unter Eigengewicht. Es sei ρ_0 die Dichte des Körpers in der Referenzkonfiguration und g die Erdbeschleunigung. Die Volumenlast ergibt sich hierfür zu

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_0 g \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

Die Divergenz eines zweistufigen Tensors \mathbf{A} ist ein Vektor der Form

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11,1} + A_{12,2} \\ A_{21,1} + A_{22,2} \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

Für das zweidimensionale Scheibenproblem lautet damit die lokale Gleichgewichtsbedingung unter Eigengewicht

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} \\ \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho_0 g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.138)$$

2.3.3.3 Tensorielle Notation versus klassische Notation

Die tensorielle Notation (Spannungsrichtung, Normalenrichtung) unterscheidet sich von der klassischen Ingenieurnotation der Spannungen (Normalenrichtung, Spannungsrichtung). In der Literatur können entsprechend der gewählten Notation die lokalen Kräftegleichgewichtsbedingungen in zwei Formen auftreten:

$$\begin{aligned} \sigma_{i,j,j} + b_i &= 0 && \text{tensorielle Notation (Spannungsrichtung, Normalenrichtung)} \\ \sigma_{j,i,j} + b_i &= 0 && \text{klassische Notation (Normalenrichtung, Spannungsrichtung)} \end{aligned}$$

In diesem Skriptum wird, soweit nicht explizit angegeben, die tensorielle Notation verwendet.

2.3.4 Gleichgewicht am infinitesimalen Scheibenelement

Alternativ zur obigen Darstellung sollen die lokalen Gleichgewichtsbedingungen anhand des Kräfte- und Momentengleichgewichts an einem infinitesimalen Scheibenelement mit der Dicke dz hergeleitet werden. Die Spannungen und Kräfte im 2D-Fall sind in Abb. 2.8 in der klassischen Ingenieurnotation dargestellt.

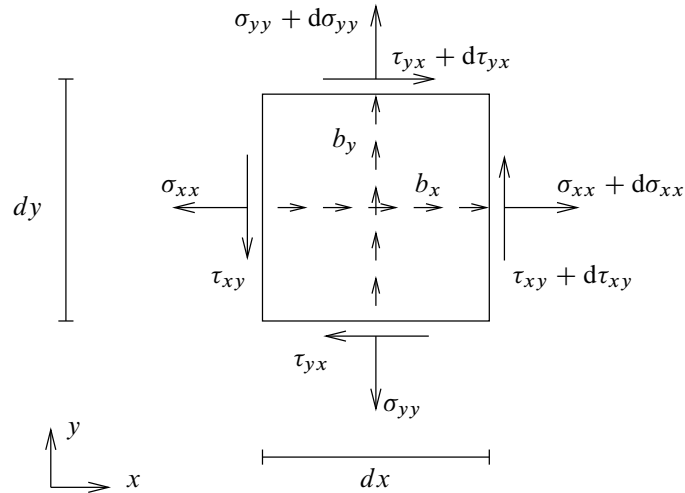


Abbildung 2.8: Gleichgewicht am infinitesimalen Scheibenelement

2.3.4.1 Momentengleichgewicht

Das Momentengleichgewicht wird um den Mittelpunkt des dargestellten Scheibenelementes angeschrieben. Damit entfallen die Beiträge der Normalspannungen σ_{xx} , σ_{yy} und der Belastung b_x , b_y , da in allen Fällen die Wirkungslinien der resultierenden Kräfte durch den Bezugspunkt verlaufen. Nur die Schubspannungen tragen zum Momentengleichgewicht bei und es gilt mit $\sum M = 0$

$$\begin{aligned} \sum M = 0 &= (\tau_{xy} + d\tau_{xy}) \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} + \tau_{xy} \cdot dy \cdot \frac{dx}{2} \\ &\quad - (\tau_{yx} + d\tau_{yx}) \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yx} \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} \\ &= (\tau_{xy} - \tau_{yx}) \cdot dx \cdot dy + \frac{1}{2} (d\tau_{xy} - d\tau_{yx}) \cdot dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Die Zuwächse können gegenüber den Werten vernachlässigt werden und es folgt somit die *Gleichheit der zugeordneten Schubspannungen an orthogonalen Schnitten* in der klassischen Ingenieurnotation (Normalenrichtung, Spannungsrichtung)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}. \quad (2.140)$$

Die Schubspannungen τ_{xy} und τ_{yx} werden auch oftmals mit σ_{xy} und σ_{yx} bezeichnet und stimmen mit den tensoriellen Spannungskoeffizienten σ_{21} und σ_{12} überein.

Die Symmetrie des Spannungstensors kann somit in tensorieller Indeschreibweise (Spannungsrichtung, Normalenrichtung) in der Form

$$\sigma_{21} = \sigma_{12} \quad (2.141)$$

geschrieben werden.

2.3.4.2 Kräftegleichgewicht

Wir betrachten exemplarisch das Kräftegleichgewicht in x -Richtung. Aufgrund der Gleichgewichtsforderung müssen alle Kräfte verschwinden, d.h. $\sum F_x = 0$,

$$\begin{aligned} \sum F_x &= \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dy \cdot dz - \sigma_{xx} \cdot dy \cdot dz \\ &\quad + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz - \tau_{yx} \cdot dx \cdot dz \\ &\quad + b_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz \\ &= \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + b_x \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0. \end{aligned} \quad (2.142)$$

Damit folgt die lokale Gleichgewichtsbedingung in x -Richtung sowie aus einer analogen Herleitung die lokale Gleichgewichtsbedingung in y -Richtung. Man erhält in der klassischen Ingenieurnotation das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sigma_{xx,x} + \tau_{yx,y} + b_x &= 0 \\ \tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + b_y &= 0. \end{aligned} \quad (2.143)$$

In Matrixschreibweise folgt mit der Voigtschen Notation und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

$$\begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} = 0. \quad (2.144)$$

Die lokale Gleichgewichtsbedingung lautet das zweidimensionale Scheibenproblem folgt in der Form

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2.145)$$

mit dem Differentialoperator für den 2D-Fall in der klassischen Ingenieurnotation

$$\mathbf{D}^T = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & \partial_y \\ 0 & \partial_y & \partial_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.146)$$

2.4 Konstitutive Gleichungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden Spannungs- und Verzerrungsgrößen hergeleitet. Diese Größen reichen jedoch nicht aus, ein Randwertproblem vollständig zu lösen. Es werden noch Materialgleichungen benötigt, welche die individuellen Eigenschaften des betrachteten Körpers beschreiben. In der Kontinuumsmechanik werden diese Beziehungen auch als *konstitutive Gleichungen* bezeichnet.

2.4.1 Grundlagen der Materialtheorie

In diesem Abschnitt werden einige grundsätzliche Hinweise zur Materialtheorie und zur Struktur der Materialgleichungen gegeben. Sowohl allgemeingültige Forderungen als auch spezielle Eigenschaften der Materialien beeinflussen die mathematische Formulierung der Werkstoffgesetze.

2.4.1.1 Bedingungen aus Mathematik und Physik

Zunächst müssen allgemeingültige Bedingungen aus Mathematik und Physik unabhängig von der speziellen Wahl des Materials beachtet werden.

Hinweise zur deterministischen Theorie. Die *Kontinuumsmechanik* als mathematische Theorie basiert auf der Annahme, dass alle mechanischen Beobachtungen als Feldgrößen (zum Beispiel Verzerrungen und Spannungen) beschreibbar sind, die in stetig differenzierbarer Form von der Geschichte der Bewegung und der Temperatur aller Punkte des Körpers abhängen.

Hinweise zur lokalen Wirkung. Der Spannungszustand eines betrachteten Punktes wird von der Deformation aller anderen Punkte des Körpers beeinflusst. Hierbei ist es aber sinnvoll, die Entfernung zwischen den Punkten zu berücksichtigen, da Punkte in weiterer Entfernung eine kleinere Bedeutung als Punkte in der unmittelbaren Umgebung haben. Bei der Beschränkung auf eine lokale Umgebung genügt es, nur noch den Gradienten der Bewegungsfeldes und den Temperaturgradienten zu berücksichtigen.

Hinweise zur materiellen Objektivität. Physikalisch sinnvolle Werkstoffgesetze müssen den Objektivitätsforderungen hinsichtlich einer Starrkörperrotation oder der Invarianz gegen Drehung des Koordinatensystems genügen. Anschaulich ausgedrückt darf die Bewegung des Beobachters keinen Einfluß auf das Materielverhalten haben. Die Struktur der Werkstoffgesetze wird von dieser Forderung stark beeinflusst.

Hinweise zur Zulässigkeit. Die Materialgesetze dürfen den Bilanz- und Erhaltungssätzen sowie dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht widersprechen. Auch hierdurch ergeben sich weitergehende Restriktionen für die Struktur der konstitutiven Beziehungen.

2.4.1.2 Bedingungen aus der Wahl der Materialklasse

Die Wahl des konkreten Materialverhaltens oder aber der Materialklasse führt zu weitergehenden Einschränkungen und oftmals auch wesentlichen Vereinfachungen für die mathematische Formulierung der Werkstoffgesetze.

Hinweise zur Homogenität. Für die Beschreibung und Berechnung des Materialverhaltens einer Struktur ist es wesentlich, ob das Material *homogen* oder *inhomogen* ist. Im Fall der Homogenität wird angenommen, dass alle betrachteten Punkte identisches Materialverhalten aufweisen. Eine Berücksichtigung des betrachteten materiellen Punktes ist deshalb nicht erforderlich. Naturgemäß ist ein inhomogenes Materialverhalten komplexer zu beschreiben und zu berechnen.

Hinweise zur nachlassenden Erinnerung. Die einzelnen Materialien haben unterschiedliches Erinnerungsvermögen an vergangene Ereignisse. Als wichtigen Grenzfall dieser Betrachtung tritt die *Elastizität* auf, bei der die aktuelle Spannung nur vom aktuellen Deformationszustand abhängen soll. Es liegt somit keine Geschichtsabhängigkeit vor. Die Deformationen sind vollständig reversibel und die Be- und Entlastungskurven stimmen überein.

Hinweise zur materiellen Symmetrie. Die Richtungsabhängigkeit des Materialverhaltens muß ebenfalls in den konstitutiven Beziehungen berücksichtigt werden. Die Werkstoffe zeichnen sich durch ausgewählte Symmetrierichtungen aus, in denen identisches Materialverhalten auftritt. Im Grenzfall der *Isotropie* ist keine Richtungsabhängigkeit mehr vorhanden und das Material besitzt identische Materialeigenschaften in allen Richtungen.

2.4.2 Die Eigenschaften der linearen Elastizität

Basierend auf den allgemeinen Überlegungen werden nun zunächst die Materialeigenschaften der linearen Elastizität dargestellt. Zur Vereinfachung betrachten wir ausschließlich *homogene Materialien* und vernachlässigen hiermit eine mögliche Ortsabhängigkeit des Materialverhaltens.

2.4.2.1 Grundlagen der Hyperelastizität

Für die wichtige Klasse der *hyperelastischen Materialien*¹⁷ kann die Struktur der Materialgleichungen aus den obigen Betrachtungen hergeleitet werden.

¹⁷In der Regel meint man mit dem Begriff der *Elastizität* die hier dargestellte *Hyperelastizität*. Bei der alternativ möglichen *Hypoelastizität* wird auf die Existenz einer Formänderungsenergiefunktion verzichtet und das Werkstoffverhalten wird inkrementell in der Form $\Delta\sigma = E \cdot \Delta\varepsilon$ beschrieben. Im Eindimensionalen bedeutet dieses, dass die Zuwächse der Verzerrungen $\Delta\varepsilon$ zusammen mit dem i.d.R. veränderlichen Elastizitätsmodul E die Zuwächse der Spannungen $\Delta\sigma$ beschreiben. Auf die *Hypoelastizität* wird mit dem Verweis auf die Literatur in diesem Skript nicht eingegangen.

Allgemeingültige Aussagen für nichtlineare Deformationen. Das *elastische Verhalten* ist dadurch gekennzeichnet, dass es im Sinne einer lokalen Wirkung nur von den materiellen Deformationsgradienten des aktuellen Punktes abhängt. Weiterhin ist eine Geschichtsabhängigkeit des Materialverhaltens durch die Berücksichtigung vergangener Zustände (nachlassende Erinnerung) nicht vorgesehen, d.h. einzig der aktuelle Deformationsgradient \mathbf{F} wird berücksichtigt.

Die *Hyperelastizität* bedeutet, dass eine hinreichend glatte *Formänderungsenergiefunktion* $W = \hat{W}(\mathbf{F})$ existiert. Aus diesem Potential können der Spannungstensor und der Werkstofftensor durch Ableitungen nach geeigneten Verzerrungsmaßen hergeleitet werden. Durch Wahl materieller (bezogen auf den unverformten Körper Ω) oder räumlicher (bezogen auf den deformierten Körper $\varphi(\Omega)$) Spannungs- und Verzerrungstensoren entstehen unterschiedlich, aber äquivalente Materialgleichungen.

Hyperelastizität kleiner Deformationen. Im ersten Schritt wird die *geometrische Linearisierung*, das ist die Beschränkung auf kleine Deformationen, vorgenommen. Somit gilt die eingeführte lineare Beziehung zwischen den Verschiebungen und den Verzerrungen. Es ist zu beachten, dass hiermit weiterhin (physikalisch) nichtlineare Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verzerrungen möglich sind. Für dieses Modellproblem folgt die Formänderungsenergiefunktion zu

$$W = \hat{W}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})) . \quad (2.147)$$

Für einen gegebenen (linearen) Deformationszustand folgt der *lineare Spannungstensor* $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ durch eine partielle Ableitung nach den linearen Verzerrungen, d.h.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\partial W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} . \quad (2.148)$$

Der *Materialtensor* $\hat{\mathbb{C}}$ wird durch eine partielle Ableitung der linearen Spannungen nach dem linearen Verzerrungstensor gebildet, d.h.

$$\hat{\mathbb{C}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} . \quad (2.149)$$

Der Materialtensor ist im Allgemeinen noch eine nichtlineare Funktion der linearen Verzerrungen und damit nicht konstant.

Physikalisch lineare Hyperelastizität kleiner Deformationen. In einem zweiten Schritt wird die *physikalische Linearisierung* durchgeführt, bei der die nichtlineare Beziehung (2.148) zwischen Spannungen und Verzerrungen durch einen linearen Zusammenhang ersetzt wird. Anschaulich entspricht dieses der Annäherung des nichtlinearen Verhaltens durch die Tangente im Ursprung, siehe die nachfolgende Darstellung für eine eindimensionale Veranschaulichung.

Das Werkstoffverhalten der (geometrisch und physikalisch) *linearen Elastizität*, das ist die *physikalisch lineare Hyperelastizität kleiner Deformationen*, kann in der Form

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{E} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.150)$$

beschrieben werden. Der zugehörige *Elastizitätstensor* \mathbb{E} entspricht dabei dem Materialtensor der Gleichung (2.149) für $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0}$, also

$$\mathbb{E} := \mathbb{C}(\mathbf{0}) = \left. \frac{\partial^2 W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \right|_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\mathbf{0}}. \quad (2.151)$$

Ebenso läßt sich die nunmehr die in den linearen Verzerrungen $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ quadratische Formänderungsenergiefunktion W durch

$$W = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbb{E} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.152)$$

ausdrücken. Diese Tensorbeziehungen bildet den Ausgangspunkt für alle weiteren Betrachtungen der linearen Elastizitätstheorie.

2.4.3 Die lineare Elastizität in Matrixschreibweise

Die bisherigen Überlegungen zur Materialtheorie führen zur Tensor Darstellung eines allgemeinen linear-elastischen Materialverhaltens in der Form

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbb{E} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{\partial W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbb{E} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \mathbb{E} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \end{aligned} \quad (2.153)$$

2.4.3.1 Eigenschaften der allgemeinen linearen Elastizität

Die Tensorbeziehungen können nach Auswertung für eine kartesische Basis in der Indeschreibweise

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \sigma_{ij} &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ \mathbb{E}_{ijkl} &= \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \end{aligned} \quad (2.154)$$

angegeben werden. Das linear-elastische Materialgesetz ist in dieser allgemeinen Form durch die Angabe der insgesamt $3^4 = 81$ Materialkonstanten \mathbb{E}_{ijkl} bestimmt. Eine Reduktion dieser 81 Koeffizienten ist in den folgenden drei Schritten bereits durch die obigen Annahmen festgelegt.

- **Symmetrie des Spannungstensors.** Auf Grund der Symmetrie des Spannungstensors $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T$, d.h. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, sind die ersten beiden Indizes der Elastizitätskoeffizienten vertauschbar, d.h. es gilt $\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{jikl}$. Damit sind nur noch $6 \cdot 9 = 54$ Koeffizienten wesentlich.

- **Symmetrie des Verzerrungstensors.** Auf Grund der Symmetrie des Verzerrungstensors $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^T$, d.h. $\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$, sind die letzten beiden Indizes der Elastizitätskoeffizienten vertauschbar, d.h. es gilt $\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{ijlk}$. Damit sind nur von $6 \cdot 6 = 36$ Koeffizienten wesentlich.
- **Potentialcharakter der Formänderungsenergie.** Die Koeffizienten \mathbb{E}_{ijkl} ergeben sich aus der zweifachen partiellen Ableitung der Formänderungsenergie nach den Verzerrungskoeffizienten. Nach dem *Satz über die Vertauschbarkeit partieller Ableitungen*, auch *Satz von Schwarz*¹⁸ genannt, gilt

$$\mathbb{E}_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \epsilon_{kl} \partial \epsilon_{ij}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} = \mathbb{E}_{klij} . \quad (2.155)$$

Damit sind die beiden Indexpaare (ij) und (kl) vertauschbar und es verbleiben von den insgesamt 81 Koeffizienten nur 21 wesentliche Koeffizienten.

Zusammenfassend erhält man die Beziehungen

$$\mathbb{E}_{ijkl} = \mathbb{E}_{jikl} = \mathbb{E}_{ijlk} = \mathbb{E}_{jilk} = \mathbb{E}_{klij} = \mathbb{E}_{lkij} = \mathbb{E}_{klji} = \mathbb{E}_{lkji} \quad (2.156)$$

und das allgemeine linear-elastische Materialverhalten ist durch 21 Koeffizienten eindeutig bestimmt.

Eine weitere Einschränkung ergibt sich aus der Forderung der *positiven Definitheit* des Elastizitätstensors, d.h. durch $W > 0$ für alle Verzerrungen $\hat{\epsilon} \neq \mathbf{0}$.

2.4.3.2 Das allgemeine Elastizität in Matrixschreibweise

Die Spaltenmatrix σ der Spannungen und die Spaltenmatrix ϵ der Verzerrungen

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{12} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \end{bmatrix}$$

wurden in vorigen Kapiteln definiert. Hierbei wurde bereits die Symmetrie des Spannungsmatrix $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^T$ und des Verzerrungsmatrix $\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}^T$ ausgenutzt, indem in den entsprechenden Spaltenmatrizen nur die jeweils 6 unterschiedlichen Koeffizienten aufgenommen wurden. Bei der Definition der Spaltenmatrix ϵ der Verzerrungen treten die doppelten Schubverzerrungen, d.h. die Ingenieurgleitungen, auf.

Das allgemeine linear-elastische Werkstoffgesetz soll nun in Matrixschreibweise in der Form

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.157)$$

¹⁸HERMANN AMANDUS SCHWARZ (1843-1921), deutscher Mathematiker.

mit der *Elastizitätsmatrix* \mathbf{E} gemäß

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

dargestellt. Die Elastizitätsmatrix $\text{mat} \mathbf{E}$ besitzt auf Grund der Wahl der Spannungs- und Verzerrungsmatrizen $6 \times 6 = 36$ unterschiedliche Konstanten. Der Elastizitätstensor \mathbb{E} ist symmetrisch und daher auch die zugehörige Elastizitätsmatrix, d.h. $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ bzw. $E_{ij} = E_{ji}$.

Die Koeffizienten $E_{ij} = E_{ji}$ können aus der Beziehung $\sigma_{ij} = \mathbb{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$ unter Ausnutzung aller Symmetrien die Elastizitätskoeffizienten hergeleitet werden. Es gilt für die Indexpaare $(ij) \in \{(11), (22), (33), (12), (23), (31)\}$ der Elemente von $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \mathbb{E}_{ij11} \varepsilon_{11} + \mathbb{E}_{ij22} \varepsilon_{22} + \mathbb{E}_{ij33} \varepsilon_{33} \\ & + \mathbb{E}_{ij12} 2 \varepsilon_{12} + \mathbb{E}_{ij23} 2 \varepsilon_{23} + \mathbb{E}_{ij31} 2 \varepsilon_{31} \end{aligned} \quad (2.159)$$

und somit folgt für die Elastizitätsmatrix \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{1111} & \mathbb{E}_{1122} & \mathbb{E}_{1133} & \mathbb{E}_{1112} & \mathbb{E}_{1123} & \mathbb{E}_{1131} \\ \mathbb{E}_{2211} & \mathbb{E}_{2222} & \mathbb{E}_{2233} & \mathbb{E}_{2212} & \mathbb{E}_{2223} & \mathbb{E}_{2231} \\ \mathbb{E}_{3311} & \mathbb{E}_{3322} & \mathbb{E}_{3333} & \mathbb{E}_{3312} & \mathbb{E}_{3323} & \mathbb{E}_{3331} \\ \mathbb{E}_{1211} & \mathbb{E}_{1222} & \mathbb{E}_{1233} & \mathbb{E}_{1212} & \mathbb{E}_{1223} & \mathbb{E}_{1231} \\ \mathbb{E}_{2311} & \mathbb{E}_{2322} & \mathbb{E}_{2333} & \mathbb{E}_{2312} & \mathbb{E}_{2323} & \mathbb{E}_{2331} \\ \mathbb{E}_{3111} & \mathbb{E}_{3122} & \mathbb{E}_{3133} & \mathbb{E}_{3112} & \mathbb{E}_{3123} & \mathbb{E}_{3131} \end{bmatrix}. \quad (2.160)$$

Die Koeffizienten E_{ij} gemäß (2.158) können aus dem Vergleich mit der Darstellung (2.160) und somit aus den Koeffizienten \mathbb{E}_{ijkl} bestimmt werden.

2.4.4 Das isotrope, linear-elastische Materialverhalten

2.4.4.1 Die Struktur isotroper, elastischer Materialgesetze

Die Forderung eines isotropen Materialverhaltens, das ist die Richtungsunabhängigkeit der Materialeigenschaften, führt zusammen mit der materiellen Objektivität, das ist die Unabhängigkeit der Materialgesetze von beliebigen Drehungen des Beobachters oder des beschreibenden Koordinatensystems, zu einem vollständigen Verlust von Richtungsinformationen in den konstitutiven Beziehungen. Für die bestimmende Formänderungsenergiefunktion W hyperelastischer Materialien bedeutet dieses, dass $W = \hat{W}(I_1, I_2, I_3)$ nur noch von den Invarianten (I_1, I_2, I_3) der betreffenden Verzerrungstensoren abhängt. Im Rahmen einer allgemeinen nichtlinearen Theorie werden die Invarianten des *Rechts Cauchy-Green Verzerrungstensors* \mathbf{C} betrachtet, siehe hierzu Abschnitt 2.2.6.

Im Rahmen kleiner Deformationen ergibt sich die weiterhin physikalisch nichtlineare Abhängigkeit von den Invarianten des linearen Verzerrungstensors $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ gemäß Gleichung (2.94). Eine abschließende Vereinfachung auf eine lineare Abhängigkeit der Formänderungsenergiefunktion W von den Invarianten führt auf das zentrale Materialmodell der linearen Elastizitätstheorie.

2.4.5 Das Hookesche Werkstoffgesetz

Das einfachste Materialgesetz ist das *Hookesche Gesetz*¹⁹. Dieses Materialmodell beschreibt ein linear elastisches Material, welches temperaturunabhängig, homogen und isotrop ist.

2.4.5.1 Absolute Tensorschreibweise.

Die Formänderungsenergiefunktion

$$W = \hat{W}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u})) = \mu \operatorname{sp} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{sp} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^2 \quad (2.161)$$

führt auf die konstitutive Gleichung der linearen Elastizitätstheorie, das Hookesche Werkstoffgesetz

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2\mu \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \lambda (\operatorname{sp} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \mathbf{I} \quad (2.162)$$

und den Elastizitätstensor

$$\mathbb{E} = \frac{\partial \hat{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = 2\mu \mathbb{I} + \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}. \quad (2.163)$$

Hierbei bezeichnen μ und λ die Lamé Konstanten,

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.164)$$

und \mathbb{I} den vierstufigen Einheitstensor.

2.4.5.2 Indexschreibweise für kartesische Koordinaten.

Die Auswertung der obigen Beziehungen für kartesische Koordinatensysteme führt zu den Beziehungen

$$\begin{aligned} W &= \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \lambda (\varepsilon_{kk})^2 \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \\ \mathbb{E}_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \end{aligned} \quad (2.165)$$

¹⁹ ROBERT HOOKE (1635-1703), englischer Physiker, Mathematiker und Erfinder.

2.4.5.3 Darstellung in Matrixschreibweise

Vollständig ausgeschrieben folgt aus GL. (2.163)

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.166)$$

Damit kann das Hookesche Werkstoffgesetz für den allgemeinen, dreidimensionalen Fall in der Form

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{bmatrix} \quad (2.167)$$

angegeben werden.

Ausgehend von einem zweidimensionalen Verschiebungszustand, können aus dieser Form des Hookeschen Werkstoffgesetzes die Sonderfälle des ebenen Verzerrungszustandes und des ebenen Spannungszustandes hergeleitet werden.

2.4.5.4 Der ebene Spannungszustand (ESZ)

Der ebene Spannungszustand wird dadurch charakterisiert, dass die Spannungskomponenten in der dritten Richtung verschwinden, d.h. es gilt

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \quad (2.168)$$

Hieraus ergeben sich für den ebenen Spannungszustand reduzierte Spannungs- und Verzerrungsmatrizen

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ESZ}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ESZ}} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]^T. \quad (2.169)$$

Für die Beziehung zwischen den Verzerrungen und den Spannungen folgt

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{ESZ}} = \mathbf{E}_{\text{ESZ}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ESZ}} \quad (2.170)$$

mit der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{E}_{\text{ESZ}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.171)$$

Weiterhin gilt für die Verzerrungen

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (2.172)$$

und

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (2.173)$$

Beim ebenen Spannungszustand sind die Verzerrungen ε_{11} , ε_{22} und ε_{33} also nicht mehr voneinander unabhängig.

2.4.5.5 Der ebene Verzerrungszustand (EVZ)

Beim ebenen Verzerrungszustand wird vorausgesetzt, dass die Verzerrungskomponenten in der dritten Richtung verschwinden, d.h. es gilt

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.174)$$

Dies führt zu reduzierten Spannungs- und Verzerrungsmatrizen für den ebenen Verzerrungszustand

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{EVZ}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{EVZ}} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]^T \quad (2.175)$$

Für die Beziehungen zwischen den Spannungen und den Verzerrungen folgt

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{EVZ}} = \mathbf{E}_{\text{EVZ}} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{EVZ}} \quad (2.176)$$

mit der Elastizitätsmatrix

$$\mathbf{E}_{\text{EVZ}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (2.177)$$

Weiterhin gilt für die Spannungen

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad (2.178)$$

und

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (2.179)$$

Das bedeutet, dass die Spannungen σ_{11} , σ_{22} und σ_{33} im ebenen Verzerrungszustand von einander abhängig sind.

2.4.6 Bestimmung der Lamé-Parameter λ und μ

Aus der Gleichung (2.163) erkennt man, daß die Komponenten des Elastizitätstensors für das Hookesche Werkstoffgesetz aus zwei unabhängigen Werkstoffkonstanten, den Lamé-Parametern λ und μ , gebildet werden.

Jedes mathematische Modell für reales Materialverhalten, und das Hookesche Werkstoffgesetz ist ein sehr einfaches Modell, muß mit den im Experiment beobachteten Phänomenen in Übereinstimmung gebracht werden.

Aus diesem Grunde soll nun an dieser Stelle dargestellt werden, wie sich die Lamé-Parameter λ und μ aus Versuchen bestimmen lassen. Dabei ist zu beachten, daß die Materialparameter nur für kleine Verschiebungen und kleine Verzerrungen theoretische und physikalische Bedeutung besitzen. Aus dem Vergleich von Versuch und mathematischem Modell erhalten wir die Verknüpfung zwischen den Meßgrößen

- E Elastizitätsmodul (Young's modulus) und
- ν Querkontraktionszahl (Poisson's ratio)

sowie den Lamé-Parametern λ und μ .

2.4.6.1 Experimente zur Bestimmung der Parameter

Hierzu betrachten wir drei Experimente, siehe auch *Ciarlet* [5], bei denen wir die Verschiebung $\mathbf{u} = u_i \mathbf{E}_i$ und damit die Verzerrung $\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$ vorgeben und mit den Spannungen $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{E}_i \otimes \mathbf{E}_j$ durch das Werkstoffgesetz $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ verknüpfen.

Versuch 1: Einfache Scherung.

Wir betrachten einen rechteckigen Block, der durch eine Schubspannung $\sigma_{12}^\alpha = \alpha \sigma_{12}$, wie in Abbildung 2.9 dargestellt, deformiert wird. Wie bereits betont sind sämtliche Versuche nur für kleine α bedeutsam, insbesondere tritt in den folgenden Ausführungen stets ein Fehler der Größenordnung $o(\alpha)$ auf, den wir jedoch nicht darstellen werden. Die restlichen Spannungskomponenten, die bei der beschriebenen Deformation auftreten, sind nicht dargestellt.

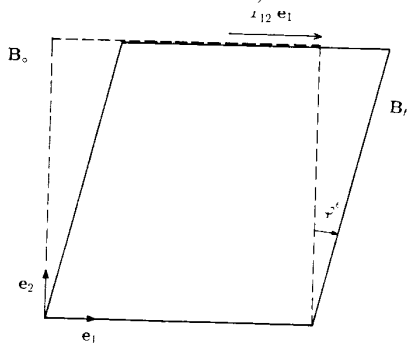


Abbildung 2.9: Versuch 1: Einfache Scherung eines rechteckigen Blockes

Unsere Beobachtung zeigt, daß sich infolge der aufgebrauchten Schubspannung $\sigma_{12}^\alpha = \alpha \sigma_{12} > 0$ für kleine Werte von $\alpha > 0$ der Verschiebungszustand

$$\mathbf{u}^\alpha = \alpha \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

einstellt. Hieraus ergeben sich die Verzerrungskomponenten

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, j = 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Werten wir das Werkstoffgesetz für die Schubspannung σ_{12}^α aus, so folgt

$$\sigma_{12}^\alpha = \alpha \cdot \mu > 0, \quad (2.180)$$

d. h. wir erhalten die Ungleichung

$$\boxed{\mu > 0} \quad (2.181)$$

als erste Bedingungsgleichung für die Lamé-Parameter.

Versuch 2: Konstanter Druck auf einer Kugel.

Im zweiten Experiment betrachten wir eine Kugel, die durch den konstanten Druck $\alpha \cdot p > 0$ für kleine Werte $\alpha > 0$ belastet wird.

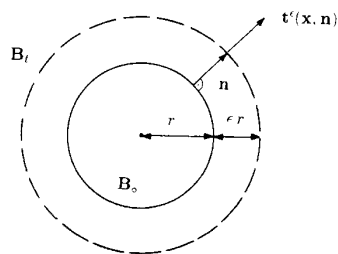


Abbildung 2.10: Versuch 2: Konstanter Druck auf eine Kugel

Die Spannungskomponenten σ_{ij}^α ergeben sich bezüglich des gewählten kartesischen Koordinatensystems somit zu

$$\sigma_{ij}^\alpha = \begin{cases} -\alpha \cdot p & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. es gilt $\sigma_{ij}^\alpha = -\alpha p \delta_{ij}$.

Im Experiment beobachten wir, daß die Kugel bei einem elastisch isotropen Werkstoff gleichmäßig auf eine Kugel mit kleinerem Durchmesser zusammengedrückt wird, d. h. es stellt sich der Verschiebungszustand

$$\mathbf{u}^\alpha = -\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ein. Damit ergeben sich die Verzerrungskomponenten ε_{ij} zu

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -\alpha & \text{für } i = j \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

d. h. $\varepsilon_{ij} = -\alpha \delta_{ij}$

Setzen wir die Spannungen und Verzerrungen in das Werkstoffgesetz ein, so erhalten wir

$$-\alpha p \delta_{ij} = -\alpha(3\lambda + 2\mu)\delta_{ij}, \quad (2.182)$$

und mit $p > 0$ gilt

$$\boxed{3\lambda + 2\mu > 0.} \quad (2.183)$$

Versuch 3: Einaxialer Zug eines kreisförmigen Stabes.

In diesem Versuch betrachten wir einen kreisförmigen Stab, der durch eine Normalspannung αE in Stablängsrichtung beansprucht wird, d. h. der Beanspruchungszustand lautet

$$\sigma_{ij}^\alpha = \begin{cases} \alpha E & \text{für } i = j = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

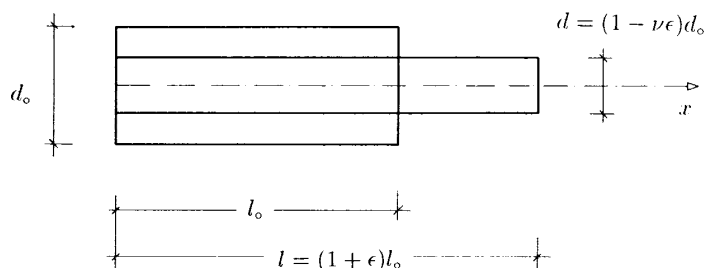


Abbildung 2.11: Versuch 3: Einaxialer Zug eines kreisförmigen Stabes

Im Experiment beobachten wir eine Verlängerung des Stabes sowie eine gleichmäßige Verminderung der Querschnittsfläche. Der Verschiebungszustand ergibt sich für

kleine Werte von $\alpha > 0$ zu

$$\mathbf{u}^\alpha = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ -\nu x_2 \\ -\nu x_3 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Verzerrungskomponenten zu

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -\nu\alpha & \text{für } i, j = 2 \text{ oder } i, j = 3 \\ \alpha & \text{für } i, j = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Setzen wir die Spannungen und Verzerrungen in das Hookesche Werkstoffgesetz ein, so erhalten wir

$$\sigma_{ij}^\alpha = \alpha(\lambda(1-2\nu) - 2\nu\mu) = 0 \quad \text{für } i, j = 2 \text{ oder } i, j = 3 \quad (2.184)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha = 0 \quad \text{für } i \neq j \quad (2.185)$$

$$\sigma_{ij}^\alpha = \alpha(\lambda(1-2\nu) + 2\mu) = \alpha E \quad \text{für } i, j = 1 \quad (2.186)$$

Damit erhalten wir aus (2.184) die Beziehung

$$\lambda(1-2\nu) - 2\nu\mu = 0$$

und daraus, da $\lambda + \mu > 0$ nach (2.181) und (2.183),

$$\boxed{v = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}}. \quad (2.187)$$

Mit der natürlichen Annahme $\nu > 0$ folgt sofort

$$\boxed{\lambda > 0}. \quad (2.188)$$

Mit der Bezeichnung (2.187) erhalten wir aus der Gleichung (2.186) für die Spannungskomponente σ_{11}

$$\sigma_{11}^\alpha = \alpha \cdot E = \alpha \left(\lambda \left(1 - \frac{2\lambda}{2(\lambda + \mu)} \right) + 2\mu \right)$$

und damit die Beziehung

$$\boxed{E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}}. \quad (2.189)$$

2.4.6.2 Interpretation der Ergebnisse

Aus den Experimenten lassen sich anschauliche Deutungen für die aus den Lamé-Parametern hergeleiteten Konstanten gewinnen.

1. Die Konstante ν nach (2.187), d. h.

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

mißt im dritten Versuch für kleine Verzerrungen das Verhältnis zwischen der relativen Abnahme des Querschnittsdurchmessers zu der relativen Verlängerung des Stabes, d. h. es gilt

$$\nu = \frac{\frac{d_o - d}{d}}{\left(\frac{l - l_o}{l_o}\right)}$$

Die Konstante ν wird daher als *Querkontraktionszahl* oder in der englischsprachigen Literatur als *Poisson's ratio* bezeichnet.

2. Die Konstante E des dritten Versuches mißt für kleine Verzerrungen das Verhältnis der Zugspannung σ_{11}^α zu der relativen Längenänderung

$$\alpha = \frac{l - l_o}{l_o}$$

des Stabes und ist damit ein Maß für die *Elastizität* des Materials. Daher wird E mit

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

als *Elastizitätsmodul* oder als *Young's modulus* bezeichnet.

3. Im ersten Versuch wird durch den Lamé-Parameter μ die Schubspannung σ_{12}^α mit der Winkeländerung $\alpha = \tan \varphi$ nach Gleichung (2.180) verknüpft, d. h. es gilt

$$\mu = \frac{\sigma_{12}^\alpha}{\alpha}$$

Aus dieser Beobachtung führen wir mit

$$G := \mu$$

den *Schubmodul* ein.

4. Betrachten wir das zweite Experiment, so wird der Wert $3\lambda + 2\mu$ in (2.182) in Beziehung zur Druckbelastung p der Kugel gesetzt und stellt damit ein Maß für die allseitige, gleichmäßige Kompressionsfähigkeit des Materials dar. Aus diesem Grund wird die Kenngröße

$$K := \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$$

eingeführt und als *Kompressionsmodul* oder *bulk modulus* benannt.

Damit haben wir die Beziehungen zwischen den Lamé-Parameter λ und μ und den anschaulich zu interpretierenden Materialparametern:

- Elastizitätsmodul $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$
- Schubmodul $G = \mu$
- Querkontraktionszahl $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
- Kompressionsmodul $K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu)$

hergeleitet.

Mit diesen Bezeichnungen kann das Hookesche Werkstoffgesetz und dessen inverse Beziehung z. B. für die Koeffizienten bzgl. des kartesischen Koordinatensystems in der Form

$$\sigma_{ij} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + \frac{E}{2(1+\nu)}\varepsilon_{ij} \quad (2.190)$$

$$= \frac{2G\nu}{1-2\nu}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.191)$$

für das Hookesche Werkstoffgesetz, sowie als

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.192)$$

für die inverse Beziehung, dargestellt werden.

2.4.6.3 Zusammenstellung der Materialparameter

Das Hookesche Gesetz ist eindeutig über zwei Materialparameter, den Lamé Parametern λ und μ , definiert. Es gibt noch 4 weitere, sinnvolle und anschaulich interpretierbare Materialparameter, wie E-Modul E , Schubmodul G , Kompressionsmodul K und Querkontraktionszahl ν .

Die Beziehungen zwischen den Materialparametern sind in Tabelle 2.4.6.3 angegeben.

Tabelle 2.1: Beziehungen zwischen den Materialparametern

	λ	$\mu \equiv G$	E	ν	K
λ, μ	λ	μ	$\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
λ, E	λ	$\frac{E-3\lambda+r^*}{4}$	E	$\frac{2\lambda}{E+\lambda+r^*}$	$\frac{E+3\lambda+r^*}{6}$
λ, ν	λ	$\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$	ν	$\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$
λ, K	λ	$\frac{3}{2}(K - \lambda)$	$\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$	$\frac{\lambda}{3K-\lambda}$	K
μ, E	$\frac{\mu(E-2\mu)}{3\mu-E}$	μ	E	$\frac{E-2\mu}{2\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu-E)}$
μ, ν	$\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$	μ	$2\mu(1 + \nu)$	ν	$\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$
μ, K	$K - \frac{2}{3}\mu$	μ	$\frac{9K\mu}{3K+\mu}$	$\frac{3K-2\mu}{6K+2\mu}$	K
E, ν	$\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\frac{E}{2(1+\nu)}$	E	ν	$\frac{E}{3(1-2\nu)}$
E, K	$\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$	$\frac{3KE}{9K-E}$	E	$\frac{3K-E}{6K}$	K
ν, K	$\frac{3K\nu}{1+\nu}$	$\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$	ν	K

r^* bedeutet hier $\sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2E\lambda}$

3 Die Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie

Die Feldprobleme der mathematischen Physik und somit auch der Mechanik führen in ihrer mathematischen Formulierung zu *Randwertprobleme* (RWP) (oder auch *Randwertaufgaben* RWA) sowie für zeitabhängige Effekte zu *Anfangswertprobleme* (AWP) (oder auch *Anfangswertaufgaben* (AWA)). Im Rahmen der Elastostatik der Flächentragwerke treten keine Anfangswertprobleme auf und wir können auf eine Darstellung von Anfangswertaufgaben an dieser Stelle verzichten.

Ein Randwertproblem setzt sich zusammen aus einer *Differentialgleichung*, welche im betrachteten Gebiet Ω erfüllt werden muss und gegebenen *Randbedingungen*, die auf dem Rand $\Gamma = \partial\Omega$ des Gebietes vorgegeben sind.

Gesucht ist somit eine hinreichend oft stetig differentierbare Funktion, welche das

$$\text{Randwertproblem (RWP)} : \begin{cases} \text{Differentialgleichung (DGL)} & \text{im Gebiet } \Omega \\ \text{Randbedingungen (RB)} & \text{auf dem Rand } \Gamma \end{cases}$$

löst. Die Lösung wird als *klassische Lösung* oder auch als *starke Lösung* bezeichnet.

Die Feldprobleme der Mechanik verbinden die geometrischen Feldgrößen mit den physikalischen Feldgrößen, das sind die Verschiebungen und Verzerrungen mit den Spannungsfunktionen und den Spannungen. Die beschriebenen Grundgleichungen können daher einerseits zu Differentialgleichungen für die Verschiebungen führen; andererseits ergeben sich aber auch Differentialgleichungen in den physikalischen Größene der Spannungen und der Spannungsfunktionen.

Dieses Kapitel stellt die unterschiedlichen Randwertprobleme der linearen Elastizitätstheorie in Matrixnotation zusammen. Entsprechend der Vorgehensweise bei den Grundgleichungen werden zunächst allgemeingültige Darstellungen einer dreidimensionalen Theorie angegeben, aus denen der Sonderfall der Scheibe abgeleitet wird.

3.1 Randwertprobleme für die Verschiebungen

Zunächst werden die Randwertprobleme für die Verschiebungen \mathbf{u} hergeleitet.

3.1.1 Navier-Lamésche Verschiebungsdifferentialgleichungen

Der Ausgangspunkt für das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie ist das folgende System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, bestehend aus den kinematischen Beziehungen (2.55), dem Materialgesetz (2.150) und der lokalen Gleichgewichtsbedingung (2.132):

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbb{E} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} & \sigma_{ij} &= \mathbb{E}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ -\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{b} & -\sigma_{ij,j} &= b_i \end{aligned} \quad (3.1)$$

Hierbei bezeichnet $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{ij}]$ den symmetrischen Spannungstensor und $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{ij}]$ den linearen Verzerrungstensor. Weiterhin ergeben sich die kartesischen Koeffizienten für ein Hookesches Gesetz gemäß Gleichung (2.165) zu

$$\mathbb{E}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) . \quad (3.2)$$

3.1.1.1 Herleitung der Verschiebungsdifferentialgleichung

Durch konsequentes Einsetzen der Spannungen und Verzerrungen in die Gleichgewichtsbedingung (3.1)₃, erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Verschiebungskomponenten u_i :

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j} &= -\sigma_{ji,j} \\ &= -2\mu \varepsilon_{ji,j} - \lambda \varepsilon_{kk,i} \\ &= -\mu (u_{j,i} + u_{i,j})_{,j} - \lambda (u_{j,j})_{,i} \\ &= -\mu u_{i,jj} - (\lambda + \mu) u_{j,ji} \end{aligned} \quad (3.3)$$

und somit gilt die Differentialgleichung

$$-\mu u_{i,jj} - (\lambda + \mu) u_{j,ji} = b_i \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega . \quad (3.4)$$

Mit dem Differentialoperator \mathbf{L} , dem Laplace-Operator Δ sowie dem Nabla-Operator ∇ , jeweils angewendet auf Verschiebung \mathbf{u} , kann diese Beziehung für die kartesischen Koeffizienten auch in der absoluten Schreibweise der Vektoranalysis

$$\boxed{-\mathbf{L}\mathbf{u} = -[\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}_x \mathbf{u}] = \mathbf{b}} \quad (3.5)$$

dargestellt werden. Dies ist die Differentialgleichung der linearen Elastizitätstheorie und wird auch als *Lamé-Naviersche Verschiebungsdifferentialgleichung* bezeichnet. Das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie lässt sich nun folgendermaßen formulieren.

Definition 3.1 (Randwertproblem). *Finde ein $\mathbf{u} \in C^2$, welches die Gleichung*

$$-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.6)$$

mit dem Differentialoperator

$$\mathbf{L} = [\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div}_x \mathbf{u}] \quad (3.7)$$

und die zugehörigen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_N$$

erfüllt.

3.1.1.2 Darstellung in Matrixschreibweise

Zur Darstellung des Randwertproblems in Matrizenform verwenden wir die kinematische Beziehung (2.61), das Materialgesetz (2.157) und die lokale Gleichgewichtsbedingung (2.135) in Matrizenform, d.h.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{D}\mathbf{u} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \\ -\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Durch sukzessives Einsetzen von Kinematik und Materialgesetz in die Gleichgewichtsbedingung folgt

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^T \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} \quad (3.9)$$

Damit folgt die Lamé-Naviersche Verschiebungsdifferentialgleichung (3.5) in Matrixdarstellung in der Form

$$\boxed{-\mathbf{L}\mathbf{u} = -\mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D} \mathbf{u} = \mathbf{b}}. \quad (3.10)$$

Der Differentialoperator ergibt sich in Matrixschreibweise zu

$$\mathbf{L} := \mathbf{D}^T \mathbf{E} \mathbf{D}. \quad (3.11)$$

3.1.1.3 Eigenschaften der Verschiebungsdifferentialgleichung

Die Lamé-Naviersche Verschiebungsdifferentialgleichung ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Auf Grund der Linearität gilt das *Superpositionsgesetz*. Demnach kann die Strukturantwort für eine Lastfallkombination aus der Kombination der Strukturantworten der einzelnen Lastfälle zusammengesetzt werden. Für beliebige rechte Seiten $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ gilt $-\mathbf{L}[\mathbf{u}_1] = \mathbf{b}_1$ und $-\mathbf{L}[\mathbf{u}_2] = \mathbf{b}_2$. Dann folgt mit den Lastfaktoren α_1, α_2 und somit für die Lastfallkombination $\mathbf{b} = \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2$ die Beziehung

$$\begin{aligned} -\mathbf{L}[\mathbf{u}] = \mathbf{b} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 = \alpha_1 (-\mathbf{L}[\mathbf{u}_1]) + \alpha_2 (-\mathbf{L}[\mathbf{u}_1]) \\ &= -\mathbf{L}[\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2] \end{aligned} \quad (3.12)$$

und damit die Aussage $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2$ des Superpositionsgesetzes.

3.1.2 Biharmonische Differentialgleichungen für die Verschiebungen

Entfallen in den Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen (3.4) die Volumenkräfte und die (hier nicht dargestellten) Beschleunigungsterme, so erhält man (nach dem Vertauschen der Indizes i, j)

$$(\mu + \lambda) u_{i,ij} + \mu u_{j,ii} = 0. \quad (3.13)$$

Durch nochmalige Differentiation nach X_j und Summieren ergibt sich hieraus

$$(\lambda + \mu) u_{i,ijj} + \mu u_{j,iii} = 0.$$

Durch die Vertauschbarkeit der Reihenfolge der partiellen Ableitungen folgt dann

$$(\lambda + \mu) u_{i,ijj} + \mu u_{j,jii} = 0.$$

Tauscht man nun noch die Summationsindizes i und j im zweiten Term aus (dies ist möglich, da i und j stumme Indizes sind), können beide Terme in der Form

$$(\lambda + 2\mu) u_{i,ijj} = 0$$

zusammengefaßt werden. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn

$$(u_{i,i}),_{jj} = 0 \quad (3.14)$$

ist. Mit der Einführung des Laplace-Operators läßt sich hierfür schreiben

$$\Delta (u_{i,i}) = 0. \quad (3.15)$$

Eine weitere Umformung ist mit der Volumendilatation Δe in der Form

$$\Delta (u_{i,i}) = \Delta \varepsilon_{ii} = \Delta e \quad (3.16)$$

möglich. Durch zweimaliges Ableiten der Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichung in der Form (3.13) nach X_m und Summieren erhält man

$$(\mu + \lambda) u_{i,ijmm} + \mu u_{j,iimm} = 0.$$

Da die Reihenfolge der partiellen Differentiationen vertauschbar ist, kann hierfür

$$(\mu + \lambda)[(u_{i,i}),_{mm}]_{,j} + \mu u_{j,iimm} = 0$$

geschrieben werden. Nun ist aber nach (3.14) der Ausdruck in der eckigen Klammer gerade gleich Null, so daß man als Ergebnis schließlich die *biharmonischen Differentialgleichungen für die Verschiebungskomponenten* erhält, d. h. für $j = 1, 2, 3$ gilt

$$\boxed{u_{j,iimm} = 0}, \quad (3.17)$$

oder mit Hilfe des Laplace-Operators ausgedrückt

$$\boxed{\Delta \Delta u_j = 0.} \quad (3.18)$$

In absoluter vektoranalytischer Schreibweise erhalten wir hierfür die Darstellung (siehe z. B. *de Boer* [3])

$$\boxed{(\text{Div}_X \text{Grad}_X (\text{Div}_X \text{Grad}_X \mathbf{u})) = \mathbf{0}.} \quad (3.19)$$

Hieraus lassen sich somit die Darstellungen bzgl. beliebiger Koordinatensysteme herleiten.

3.2 Randwertprobleme für die Spannungen

Es werden die Randwertprobleme für die Spannungen $\hat{\sigma}$ beziehungsweise für die Spannungsfunktionen Φ hergeleitet.

3.2.1 Biharmonische Differentialgleichungen für die Spannungen

Ausgangspunkt der Betrachtung sind wiederum die geometrischen Beziehungen, die sich aus der Definition des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors in der Form

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i})$$

ergeben. Die sechs Komponenten ε_{ik} des symmetrischen Verzerrungstensors werden aus den partiellen Ableitungen der drei Verschiebungskomponenten u_i gebildet. Für einen kontinuierlichen Verschiebungszustand können daher die sechs Verzerrungskomponenten nicht unabhängig voneinander sein. Es existieren deshalb drei sogenannte *Verträglichkeitsbedingungen* oder auch *Kompatibilitätsbedingungen* zwischen den Verzerrungen. Diese sind bereits in Abschnitt 2.2.9 hergeleitet worden. Nach Gleichung (2.81) erhalten wir somit die Verträglichkeitsbedingungen

$$\varepsilon_{il,mk} + \varepsilon_{mk,li} - \varepsilon_{ik,lm} - \varepsilon_{lm,ik} = 0.$$

In diese Verträglichkeitsbedingungen wird jetzt zur Herleitung der biharmonischen Differentialgleichungen für die Spannungen das Hookesche Gesetz in der Form der Gleichung (2.192)

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ik} - \frac{\nu}{E}\delta_{ik}\sigma_{ll}$$

eingesetzt. Dies ergibt

$$\begin{aligned} \sigma_{il,mk} + \sigma_{mk,li} - \sigma_{ik,lm} - \sigma_{lm,ik} = \\ \frac{\nu}{1+\nu}(\delta_{il}\sigma_{rr,mk} + \delta_{mk}\sigma_{rr,li} - \delta_{ik}\sigma_{rr,lm} - \delta_{lm}\sigma_{rr,ki}). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Durch Multiplikation beider Seiten mit dem Kronecker-Delta δ_{mk} ergibt sich

$$\begin{aligned} \sigma_{il,mm} + \sigma_{mm,li} - \sigma_{im,lm} - \sigma_{lm,mi} = \\ \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{il}\sigma_{rr,mm} + 3\sigma_{rr,li} - \sigma_{rr,li} - \sigma_{rr,li}). \end{aligned}$$

Nach Einführung des Laplace-Operators Δ und nach Umbenennung der stummen Indizes läßt sich schreiben

$$\Delta\sigma_{il} + \sigma_{kk,li} - \sigma_{ik,lk} - \sigma_{lk,ki} = \frac{\nu}{1+\nu} (\delta_{il}\Delta\sigma_{kk} + \sigma_{kk,li}). \quad (3.21)$$

Die linearisierte statische Kräftegleichgewichtsbedingung lautet mit der Bedeutung (Normale, Richtung) der Indizes

$$\sigma_{ki,k} + k_i = 0$$

und mit der Symmetrie des Spannungstensors, d. h. mit $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, erhalten wir hieraus

$$\sigma_{ik,k} + k_i = 0. \quad (3.22)$$

Durch partielle Differentiation dieser Bedingungen nach X_l erhält man

$$\sigma_{ik,kl} = -k_{i,l}, \quad (3.23)$$

und (3.21) läßt sich damit zu

$$\Delta\sigma_{il} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,li} - \frac{\nu}{1+\nu}\delta_{il}\Delta\sigma_{kk} = -(k_{i,l} + k_{l,i}) \quad (3.24)$$

umformen. Nun werden die Ausgangsgleichungen (3.20) zweimal mit den Kronecker-Deltas δ_{ki} und δ_{ml} multipliziert. Das ergibt die Gleichungen

$$\sigma_{il,li} + \sigma_{li,li} - \sigma_{ii,ll} - \sigma_{ll,ii} = \frac{\nu}{1+\nu} (-4\sigma_{kk,ii}).$$

Nach Einführung des Laplace-Operators und nach Umbenennung der Summationsindizes kann man hierfür

$$2\sigma_{il,li} - 2\Delta\sigma_{kk} = -\frac{4\nu}{1+\nu}\Delta\sigma_{kk}$$

und weiterhin

$$\sigma_{il,li} = \frac{1-\nu}{1+\nu}\Delta\sigma_{kk} \quad (3.25)$$

schreiben. Mit den differenzierten Gleichgewichtsbedingungen (3.23) wird daraus

$$\Delta\sigma_{kk} = -\frac{1+\nu}{1-\nu}k_{i,i} \quad (3.26)$$

oder bei fehlenden oder konstanten Volumenkräften

$$\Delta\sigma_{kk} = 0. \quad (3.27)$$

Setzt man (3.26) in (3.24) ein, so erhält man die *Gleichungen von Michell*

$$\Delta\sigma_{il} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,li} = -\frac{\nu}{1-\nu}\delta_{il}k_{k,k} - (k_{i,l} + k_{l,i}), \quad (3.28)$$

die zusammen mit den Randbedingungen für die Spannungen die Berechnung der Spannungen gestatten.

Für fehlende oder konstante Volumenkräfte k_i gehen die Gleichungen von Michell in die *Gleichungen von Beltrami* über

$$\Delta\sigma_{il} + \frac{1}{1+\nu}\sigma_{kk,li} = 0. \quad (3.29)$$

Die Darstellung der Beltrami-Gleichungen in absoluter vektoranalytischer Schreibweise lautet

$$\text{Div}_X \text{Grad}_X \hat{\sigma} + \frac{1}{1+\nu} (\text{Grad}_X \text{Grad}_X (\text{tr } \hat{\sigma})) = \mathbf{0}. \quad (3.30)$$

Auf diese Gleichungen wendet man nochmals den Laplace-Operator Δ an

$$\Delta\Delta\sigma_{il} + \frac{1}{1+\nu}(\Delta\sigma_{kk}),_{li} = 0,$$

und erhält daraus mit (3.27) die *biharmonischen Differentialgleichungen für die Spannungskomponenten* σ_{il} bei fehlenden oder konstanten Volumenkräften

$$\Delta\Delta\sigma_{il} = 0. \quad (3.31)$$

In absoluter vektoranalytischer Schreibweise erhalten wir hierfür die Darstellung (siehe z. B. *de Boer* [3])

$$(\text{Div}_X \text{Grad}_X (\text{Div}_X \text{Grad}_X \hat{\sigma})) = \mathbf{0}. \quad (3.32)$$

Hieraus lassen sich wie üblich die Darstellungen bzgl. beliebiger Koordinatensysteme herleiten.

3.2.2 Die Differentialgleichung für die Maxwell'schen Spannungsfunktionen

In der Herleitung der biharmonischen Differentialgleichung für die Spannungskomponenten ist mit Gleichung (3.22) die statische Gleichgewichtsbedingung benutzt worden. Für den Fall verschwindender Volumenkräfte $q_R \bar{\mathbf{b}}_R = \mathbf{0}$ gilt damit

$$\text{Div}_X \hat{\sigma} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

bzw. in den Koeffizienten bzgl. der kartesischen Basis

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad \text{für } i = 1, 2, 3. \quad (3.34)$$

Verwenden wir die Matrizenschreibweise, so erhalten wir weiterhin

$$\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}. \quad (3.35)$$

Um den Aufwand in der Berechnung nach Gleichung (3.31) reduzieren zu können, ist es sinnvoll, nur solche Lösungen σ_{ij} zur Konkurrenz zuzulassen, die à priori die homogenen statischen Gleichgewichtsbedingungen (3.34) bzw. (3.35) erfüllen. Diese Vorgehensweise, die von Maxwell eingeführt wurde, soll im weiteren dargestellt werden. Zur Vereinfachung der Schreibarbeit und zur Verbesserung der Übersichtlichkeit wählen wir hierzu die Matrizendarstellung.

3.2.2.1 Einführung der Spannungsfunktionen zur Erfüllung der homogenen Gleichgewichtsbedingungen

Die *Maxwellschen Spannungsfunktionen* $\phi_i(x_1, x_2, x_3)$ für $i = 1, 2, 3$ sollen die homogenen Gleichgewichtsbedingungen $\sigma_{ij,i} = 0$ oder $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ erfüllen. Nach Maxwell definiert man:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &:= \phi_{2,33} + \phi_{3,22}, \\ \sigma_{22} &:= \phi_{3,11} + \phi_{1,33}, \\ \sigma_{33} &:= \phi_{1,22} + \phi_{2,11}, \\ \sigma_{12} &:= -\phi_{3,12}, \\ \sigma_{23} &:= -\phi_{1,23}, \\ \sigma_{31} &:= -\phi_{2,31}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Mit der Schreibweise

$$\partial_{ik} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i \partial x_k}$$

und der Definition der Differentialoperatormatrix \mathbf{D}^* durch

$$\mathbf{D}_{(6,3)}^* := \begin{pmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \\ -\partial_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{31} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

folgt aus (3.36)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \partial_{33} & \partial_{22} \\ \partial_{33} & 0 & \partial_{11} \\ \partial_{22} & \partial_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\partial_{12} \\ -\partial_{23} & 0 & 0 \\ 0 & -\partial_{31} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{D}_{(6,3)}^*} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\phi}} \quad (3.38)$$

und somit gilt in Matrixschreibweise

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}^* \boldsymbol{\phi}.} \quad (3.39)$$

Im Unterschied zur Differentialoperatormatrix \mathbf{D} nach (2.60) sind in \mathbf{D}^* zweite Ableitungen enthalten. Auch ist die Besetzung der Differentialoperatormatrizen \mathbf{D} und \mathbf{D}^* unterschiedlich, und zwar ist \mathbf{D}^* gerade auf den Leerstellen von \mathbf{D} besetzt. Mit der Definition der Maxwell'schen Spannungsfunktionen ϕ_i nach (3.36) werden die homogenen statischen Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{D}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ erfüllt; denn es gilt

$$\mathbf{D}^T \mathbf{D}^* = \begin{pmatrix} 0 & \partial_{133} - \partial_{331} & \partial_{122} - \partial_{212} \\ \partial_{233} - \partial_{323} & 0 & \partial_{211} - \partial_{112} \\ \partial_{322} - \partial_{222} & \partial_{311} - \partial_{313} & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{(3,3)}. \quad (3.40)$$

3.2.2.2 Herleitung der Differentialgleichungen für die Spannungsfunktion

Nachdem mit Gleichung (3.36) die Maxwell'schen Spannungsfunktionen bereitstehen, sind die Verträglichkeitsbeziehungen für die Verzerrungen und das Elastizitätsgesetz in den Spannungsfunktionen ϕ_i auszudrücken.

Zuerst betrachten wir die Verträglichkeitsbedingungen (2.81) für die Verschiebungen. Die 6 Verzerrungen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ müssen 3 Verträglichkeits- oder Integrabilitätsbedingungen genügen, damit sich ein stetiges Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = u_i \mathbf{E}_i$ aus den Verzerrungen integrieren läßt (siehe Abschnitt 2.2.9). Aus der Beziehung $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}$ muß es durch Ableitungskombination gelingen, die Verschiebungen zu eliminieren. Wie aus (3.40) hervorgeht, ist dies aber gerade mit der Matrix \mathbf{D}^{*T} möglich und zwar ist

$$\mathbf{D}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D} \mathbf{u} = \mathbf{0} \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

d. h. es gilt

$$\boxed{\mathbf{D}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}.} \quad (3.41)$$

Dies sind die drei Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen.

Mit der inversen Beziehung des Elastizitätsgesetzes

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.42)$$

folgt durch Einsetzen von (3.41) in (3.42)

$$\mathbf{D}^{*T} \mathbf{E}^{-1} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (3.43)$$

und damit erhalten wir aus (3.39) die drei gesuchten Differentialgleichungen 4. Ordnung

$$\boxed{(\mathbf{D}^{*T} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D}^*) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}.} \quad (3.44)$$

Betrachten wir den durch (3.44) definierten Operator L^*

$$L^* := \mathbf{D}^{*T} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{D}^*, \quad (3.45)$$

so stellen wir die Symmetrie von L^* fest, d. h.

$$L^* = L^{*T}. \quad (3.46)$$

Durch systematisches Probieren erkennt man den Zusammenhang

$$D^* = B D \quad (3.47)$$

zwischen D^* und D , wobei B in der Form

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -\partial_3 & -\partial_2 & 0 & \partial_2 + \partial_3 & 0 \\ -\partial_3 & 0 & -\partial_1 & 0 & 0 & \partial_3 + \partial_1 \\ -\partial_2 & -\partial_1 & 0 & \partial_1 + \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\partial_3 & -\frac{1}{2}\partial_1 & -\frac{1}{2}\partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\partial_3 & \frac{1}{2}\partial_1 & -\frac{1}{2}\partial_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\partial_3 & -\frac{1}{2}\partial_1 & \frac{1}{2}\partial_2 \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

gegeben ist. Damit läßt sich (3.44) wie folgt darstellen

$$\boxed{(D^T B^T E^{-1} B D) \phi = 0.} \quad (3.49)$$

3.2.2.3 Die Maxwellsche Spannungsfunktion der Scheibe

Betrachten wir die beim ebenen Spannungszustand der Scheibe auftretenden Spannungen, so gilt

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{33} = 0.$$

Mit der Definition (3.36) der Maxwellschen Spannungsfunktionen erhalten wir somit

$$\phi_1 = 0, \quad \phi_2 = 0 \quad \text{und} \quad \phi_3 = \phi.$$

Die verbleibende Spannungsfunktion $\phi_3 = \phi$ wird in diesem Fall als *Airysche Spannungsfunktion* F bezeichnet und es gilt

$$\sigma_{11} = \phi_{,22}, \quad \sigma_{22} = \phi_{,11} \quad \text{und} \quad \sigma_{12} = -\phi_{,12}.$$

Damit sind die homogenen Gleichgewichtsbedingungen $\sigma_{\alpha\eta,\alpha} = 0$ mit $\alpha, \eta = 1, 2$ erfüllt. In Matrixschreibweise erhalten wir

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}}_{\sigma_{\text{ESZ}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \partial_{22} \\ \partial_{11} \\ -\partial_{12} \end{pmatrix}}_{D_{\text{ESZ}}^*} \phi, \quad (3.50)$$

und damit die Darstellung

$$\boxed{\sigma_{\text{ESZ}} = D_{\text{ESZ}}^* \phi.} \quad (3.51)$$

Die Verträglichkeitsbedingungen für die Verzerrungen sind in (3.41) mittels der Operatormatrix \mathbf{D}^* dargestellt worden und für den ebenen Verzerrungszustand folgt daraus

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0. \quad (3.52)$$

In Matrixschreibweise lautet dies

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \partial_{22} & \partial_{11} & -\partial_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{*T}} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ESZ}}} = \mathbf{0} \quad (3.53)$$

und wir erhalten analog zu (3.50) die Darstellung

$$\boxed{\mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{*T} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{ESZ}} = \mathbf{0}} \quad (3.54)$$

für den ebenen Spannungszustand. Mit dem inversen Elastizitätsgesetz für den ebenen Spannungszustand und der Definition der Maxwellschen Spannungsfunktion (3.36) ergibt sich

$$\boxed{(\mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{*T} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{-1} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^*) \phi = 0.} \quad (3.55)$$

Schreiben wir diese Beziehung ausführlich, so folgt

$$\begin{aligned} & (\mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{*T} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{-1} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^*) \phi = \\ & \begin{bmatrix} \partial_{22} & \partial_{11} & -\partial_{12} \end{bmatrix} \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{22} \\ \partial_{11} \\ -\partial_{12} \end{bmatrix} \phi = \\ & \frac{1}{E} \begin{bmatrix} \partial_{22} & \partial_{11} & -\partial_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{22} - \nu \partial_{11} \\ \partial_{11} - \nu \partial_{22} \\ -2(1+\nu) \partial_{12} \end{bmatrix} \phi = \\ & \frac{1}{E} \{ \partial_{22}(\partial_{22} - \nu \partial_{11}) + \partial_{11}(\partial_{11} - \nu \partial_{22}) + 2(1+\nu) \partial_{12} \partial_{12} \} \phi = 0. \end{aligned}$$

Nach Auswertung der partiellen Ableitungen und unter Beachtung ihrer Vertauschbarkeit folgt

$$(\mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{*T} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^{-1} \mathbf{D}_{\text{ESZ}}^*) \phi = \frac{1}{E} \{ \partial_{1111} + 2\partial_{1212} + \partial_{2222} \} \phi = 0. \quad (3.56)$$

Mit dem Laplace-Operator für zweidimensionale Problem in der Form $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ folgt daraus

$$\boxed{\Delta \Delta \phi = 0,} \quad (3.57)$$

d. h. es ergibt sich für den ebenen Spannungszustand eine homogene Bipotentialgleichung für die Airysche Spannungsfunktion ϕ .

Bemerkung 3.1 (Eigenschaften der Airyschen Spannungsfunktion).

1. Die Airysche Spannungsfunktion ϕ wird in den Lehrbüchern der Statik auch mit F bezeichnet, d. h. es gilt mit (3.57)

$$\Delta\Delta F = 0.$$

2. Die Airysche Spannungsfunktion ist unabhängig von den Stoffkonstanten des betrachteten elastischen Werkstoffes. Das Materialverhalten und somit die Abhängigkeit der Verschiebung \mathbf{u} von den Stoffkonstanten wird erst durch die Erfüllung der Randbedingungen berücksichtigt.
3. Die Scheibentheorie wird in Abschnitt 3.2.3 ohne Rückgriff auf die allgemeingültige Darstellung der Gleichung (3.49) in der üblichen Ingenieurnotation hergeleitet.

3.2.3 Die direkte Herleitung der Scheibentheorie

In den Abschnitten dieses Kapitels soll zur Vereinfachung der Darstellung auf eine weithin gebräuchliche Bezeichnungsweise übergegangen werden:

- Die materiellen Koordinaten X_1, X_2 und X_3 werden durch x, y und z ersetzt;
- Die Spannungen σ_{ik} werden dargestellt durch:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x, & \sigma_{22} &= \sigma_y, & \sigma_{33} &= \sigma_z \\ \sigma_{12} &= \tau_{xy}, & \sigma_{23} &= \tau_{yz}, & \sigma_{31} &= \tau_{zx}; \end{aligned} \quad (3.58)$$

- Anstelle des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors mit den Koeffizienten ε_{ik} werden die Ingenieurdehnmaße und die Ingenieurgleitungen verwendet:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon_x, & \varepsilon_{22} &= \varepsilon_y, & \varepsilon_{33} &= \varepsilon_z, \\ 2\varepsilon_{12} &= \gamma_{xy}, & 2\varepsilon_{23} &= \gamma_{yz}, & 2\varepsilon_{31} &= \gamma_{zx}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

- Die Kräftegleichgewichtsbedingungen in x - bzw. y -Richtung für verschwindende Volumenkräfte lauten damit:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \quad (3.61)$$

Nun wird die Airysche Spannungsfunktion F so eingeführt, daß die aus ihr abgeleiteten Spannungen die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (3.60) und (3.61) identisch erfüllen, d. h. F genügt den Bedingungen

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad \text{und} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (3.62)$$

In diesem Fall entspricht die Airysche Spannungsfunktion F der Funktion F' für den ebenen Spannungszustand. Für das verallgemeinerte Hookesche Gesetz gilt

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (3.63)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (3.64)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}. \quad (3.65)$$

Die Ingenieurdehnmaße ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Verschiebungskomponenten

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{und} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (3.66)$$

Außerdem müssen die so definierten Dehnmaße die Kompatibilitätsbedingungen (2.82)

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.67)$$

erfüllen. Durch Einsetzen der Beziehungen (3.62) für die Spannungen in das Elastizitätsgesetz erhält man

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right), \quad (3.68)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \quad (3.69)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (3.70)$$

Setzt man diese Beziehungen in die Kompatibilitätsbedingungen (3.67) ein, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{E} \left[\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - \nu \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1+\nu) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = 0 \quad (3.71)$$

für die Airysche Spannungsfunktion. Die Terme mit dem Faktor ν heben sich heraus, und man erhält die bekannte *Differentialgleichung für die Scheibe*

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) = 0, \quad (3.72)$$

d. h.

$$\boxed{\Delta \Delta F = 0}. \quad (3.73)$$

Die Scheibengleichung ist also eine harmonische Bipotentialgleichung. Das bedeutet, daß die Belastungen über die Randbedingungen eingearbeitet werden müssen.

Bemerkenswert ist, daß die Scheibengleichung keine Werkstoffkonstanten enthält. Dadurch werden auch die Lösungen stoffunabhängig, wenn an den Rändern nur Kräfte- und Verschiebungsrandbedingungen gegeben sind, die unmittelbar mit der Spannungsfunktion verknüpfbar sind. Demgegenüber ergibt sich bei Verschiebungsrandbedingungen eine Abhängigkeit vom Werkstoff. Im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche ergeben sich Schwierigkeiten bei der Integration der Verschiebungen. Dann ist es empfehlenswert, von den Differentialgleichungen für die Verschiebungen auszugehen.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß der Laplace-Operator Δ koordinateninvariant ist. Daher ist ein Übergang z. B. zu Polarkoordinaten durch eine einfache Koordinatentransformation möglich. Man erhält dann

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (3.74)$$

4 Ausgewählte analytische Lösungen der linearen Elastizitätstheorie

Die Aufgaben der Elastizitätstheorie sind meist so kompliziert, daß man im allgemeinen keine geschlossenen Lösungen angeben kann. Es sind daher auch nur wenige klassische Lösungen für die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen bekannt, z. B.

- die Torsion nicht wölbbehinderter prismatischer Stäbe nach St. Venant,
- die elastische Halbebene (siehe Abschnitt 4.2)
- der elastische Halbraum (siehe Abschnitt 4.3),
- die dicke Kugel,
- der dickwandige Zylinder und
- die unendlich ausgedehnte Scheibe mit Loch (siehe Abschnitt 4.4).

4.1 Lösungsfunktionen der Bipotentialgleichungen

In Kapitel 3 traten in den Grundgleichungen wiederholt Bipotentialgleichungen auf, zu denen wir an dieser Stelle für ausgewählte Formulierungen einige Lösungsfunktionen angeben wollen.

4.1.1 Bipotentialgleichungen in Zylinderkoordinaten für achsensymmetrische Probleme

Die biharmonische Differentialgleichung für eine Verschiebungskomponente u_i nach (3.18), eine Spannungskomponente σ_{il} nach (3.31) bzw. eine Spannungsfunktion ϕ nach (3.57)

$$\Delta \Delta u_i = 0, \quad \Delta \Delta \sigma_{il} = 0 \quad \text{und} \quad \Delta \Delta \phi = 0, \quad (4.1)$$

mit dem Laplace-Operator Δ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z)

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.2)$$

hat unter anderem folgende Lösungen, die *Bipotentialfunktionen* genannt werden:

$$\begin{aligned} & r, r^2 \\ & z, z^2, z^3, z \ln z \\ & R; \quad R = \sqrt{z^2 + r^2} \\ & \frac{1}{R}, \ln \frac{R+z}{R-z}, z \ln(z+R). \end{aligned}$$

Alle Linearkombinationen mit beliebigen Konstanten sind wegen der Linearität der Differentialgleichung ebenfalls Lösungen.

Die Verschiebungen in r - und z -Richtung ergeben sich zu

$$u = -\frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial z}, \quad (4.3)$$

$$w = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \Delta \phi - \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \quad (4.4)$$

Die Normalspannungen lauten

- radial

$$\sigma_r = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta\phi - \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right), \quad (4.5)$$

- axial

$$\sigma_z = \frac{2(2-\nu)G}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left(\Delta\phi - \frac{2}{-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right), \quad (4.6)$$

- tangential

$$\sigma_\varphi = \sigma_t = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta\phi - \frac{1}{\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \quad (4.7)$$

und für die Schubspannung gilt

$$\sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \frac{2(1-\nu)g}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Delta\phi - \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right). \quad (4.8)$$

4.1.2 Ebener Spannungszustand in Polarkoordinaten

Die Bipotentialgleichung für die Airysche Spannungsfunktion F

$$\Delta\Delta F = 0, \quad (4.9)$$

mit dem Laplace-Operator Δ in Polarkoordinaten ohne Achsensymmetrie

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (4.10)$$

hat unter anderem folgende Lösungen:

$$\begin{array}{ll} F = r^2, & F = \sin 2\varphi, \\ F = \ln r, & F = \cos 2\varphi, \\ F = r^2 \cdot \ln r, & F = r\varphi \cdot \sin \varphi, \\ F = \varphi, & F = r \cdot \varphi \cdot \cos \varphi, \\ F = \varphi^2, & F = r \cdot \ln r \cdot \cos \varphi, \\ F = \varphi^3, & F = r \ln r \cdot \cos \varphi, \\ F = r^2 \cdot \varphi, & F = \cos(n \cdot \ln r), \\ F = \varphi \cdot \ln r, & F = \cosh(n \cdot \varphi), \\ F = r^2 \cdot \varphi \ln r, & F = r^2 \cos(n \cdot \ln r) \cosh(n \cdot \varphi). \end{array}$$

Weiterhin gilt für harmonische Funktionen ϕ_1 und ϕ_2 mit $\Delta\phi_1 = 0$ bzw. $\Delta\phi_2 = 0$, daß $F = \phi_1 + r^2\phi_2$ eine biharmonische Funktion ist. Eine wichtige harmonische Funktion in Polarkoordinaten ist z. B.

$$\phi = r^n [C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi)]. \quad (4.11)$$

Die Spannungen des ebenen Spannungszustandes, dargestellt in Polarkoordinaten, ergeben sich zu

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}, \quad (4.12)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad (4.13)$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right). \quad (4.14)$$

4.1.3 Ebener Spannungszustand in kartesischen Koordinaten

Die Bipotentialgleichung für die Airysche Spannungsfunktion F

$$\Delta \Delta F = 0, \quad (4.15)$$

mit dem Laplace-Operator Δ in kartesischen Koordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (4.16)$$

hat unter anderem folgende Lösungen:

$$\begin{aligned} F &= x; x^2; x^3 \\ F &= y; y^2; y^3 \\ F &= xy \\ F &= x^2y; yx^2 \\ F &= x^3y; yx^3. \end{aligned}$$

Weiterhin sind die biharmonischen Polynome

$$\begin{aligned} P_{40} &= x^4 - 3x^2y^2; & P_{41} &= x^4y - x^2y^3 \\ P_{50} &= x^5 - 5x^3y^2; & P_{51} &= x^5y - \frac{5}{3}x^3y^3 \\ P_{60} &= x^6 - 10x^4y^2 + 5x^2y^4; & P_{61} &= x^6y - \frac{10}{3}x^4y^3 + x^2y^5 \end{aligned}$$

usw. Lösungsfunktionen. Für harmonische Funktionen ϕ mit $\Delta\phi = 0$ gilt, daß folgende Funktionen F biharmonische Funktionen sind:

$$\begin{aligned} F &= (ax + by) \phi(x, y), \\ F &= (x^2 + y^2) \phi(x, y). \end{aligned}$$

Weiterhin sind folgende logarithmische Funktionen Bipotentialfunktionen:

$$\begin{aligned} F &= \ln(x^2 + y^2), \\ F &= (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2), \\ F &= (ax + by) \ln(x^2 + y^2), \\ F &= \ln[(x + c)^2 + y^2], \\ F &= (x + c) \ln[(x + c)^2 + y^2]. \end{aligned}$$

Ebenso die folgenden Produkte von Exponentialfunktionen und trigonometrischen Funktionen

$$\begin{aligned} F &= e^{\alpha y} \sin(\alpha x), & F &= e^{-\alpha y} \sin(\alpha x), \\ F &= y e^{\alpha y} \sin(\alpha x), & F &= y e^{-\alpha y} \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

sowie die Funktionen mit vertauschten Koordinaten und die folgenden Produkte von Exponentialfunktionen und hyperbolischen Funktionen

$$\begin{aligned} F &= \sinh(\alpha y) \cdot \sin(\alpha x), \\ F &= y \cdot \sinh(\alpha y) \cdot \sin(\alpha x), \\ F &= x \cdot \sinh(\alpha y) \cdot \sin(\alpha x) \end{aligned}$$

und ebenso die Funktionen mit vertauschten Koordinaten.

Die Spannungen des ebenen Spannungszustandes dargestellt in kartesischen Koordinaten ergeben sich zu

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad (4.17)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (4.18)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \quad (4.19)$$

4.1.4 Analytische Lösungen

Beispiele für analytische Lösungen sind im Rahmen der Übungen vorgestellt worden und noch nicht im Skript enthalten.

4.2 Die elastische Halbebene unter Wirkung einer Einzellast

Aus den unendlich vielen Lösungen der Scheibengleichung (3.73) muß bei einem vorgegebenem Problem eine Lösung gefunden werden, die den jeweiligen Randbedingungen genügt. Ein möglicher Lösungsweg soll an einem einfachen Beispiel skizziert werden.

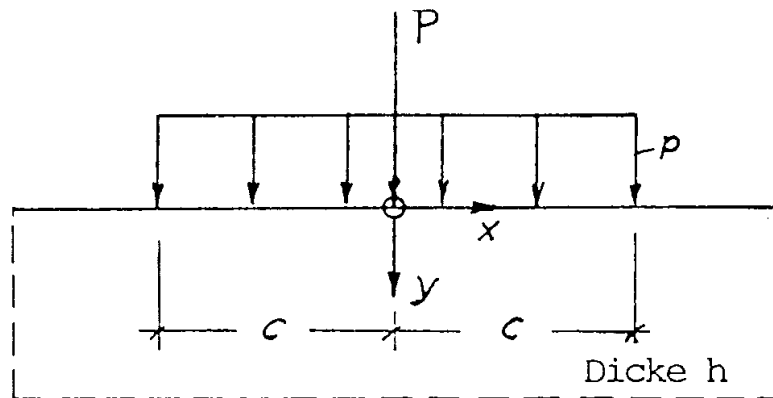


Abbildung 4.1: Rand einer Scheibe mit Belastung

Dazu betrachten wir den in Abbildung 4.1 dargestellten Rand einer Scheibe mit der Streckenlast $p(x)$. Diese Streckenlast lässt sich als *Fouriersches Integral* in der Form

$$p(x) = \frac{2p}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} \cos \kappa x d\kappa \quad (4.20)$$

darstellen. Diese Gleichung gilt für eine konstante Streckenlast der Länge $2c$. Bei einer Einzellast setzen wir $2pc = P$ und führen den Grenzübergang $c \rightarrow 0$ durch. Der Ansatz für die Spannungsfunktion F nach Abschnitt 3.2.3 lautet

$$F = \int_0^{\infty} \frac{1}{\kappa^2} (A + \kappa y B) e^{-\kappa y} \cos \kappa x d\kappa. \quad (4.21)$$

Durch Einsetzen in die Randbedingungen

$$\sigma_y(y=0) = \frac{1}{h} p(x) \quad \text{und} \quad (4.22)$$

$$\tau_{xy}(y=0) = 0 \quad (4.23)$$

erhält man die Konstanten A und B . Aus (4.22) folgt

$$-\int_0^{\infty} A \cos \kappa x d\kappa = \frac{2p}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} \cos \kappa x d\kappa$$

und mit der Wahl

$$A = -\frac{2p}{\pi h} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} \quad (4.24)$$

ist die erste Randbedingung für jedes x erfüllt. Aus der zweiten Randbedingung (4.23) folgt

$$\int_0^{\infty} (A - B) \sin \kappa x d\kappa = 0,$$

und daraus

$$A = B. \quad (4.25)$$

Damit erhält man aus der Definition der Spannungen nach (3.62) die Lösungen für die Spannungskomponenten:

$$\sigma_x = \frac{2p}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} (1 - \kappa y) e^{-\kappa y} \cos \kappa x d\kappa, \quad (4.26)$$

$$\sigma_y = \frac{2p}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} (1 + \kappa y) e^{-\kappa y} \cos \kappa x d\kappa, \quad (4.27)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2p}{\pi h} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa c}{\kappa} \kappa y e^{-\kappa y} \sin \kappa x d\kappa. \quad (4.28)$$

Beim Grenzübergang ($c \rightarrow 0$) zu einer Einzellast P gilt die Grenzwertbetrachtung

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{\sin \kappa c}{\kappa c} = 1,$$

und die Spannungskomponenten ergeben sich damit zu:

$$\sigma_x = \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} (1 - \kappa y) e^{-\kappa y} \cos \kappa x d\kappa,$$

$$\sigma_y = \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} (1 + \kappa y) e^{-\kappa y} \cos \kappa x d\kappa,$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{\pi h} \int_0^{\infty} \kappa y e^{-\kappa y} \sin \kappa x d\kappa.$$

Nach der Durchführung der Integration entstehen die folgenden Ausdrücke für die Spannungskomponenten, die in der Abbildung 4.2 dargestellt sind:

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi h} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.29)$$

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi h} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (4.30)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi h} \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (4.31)$$

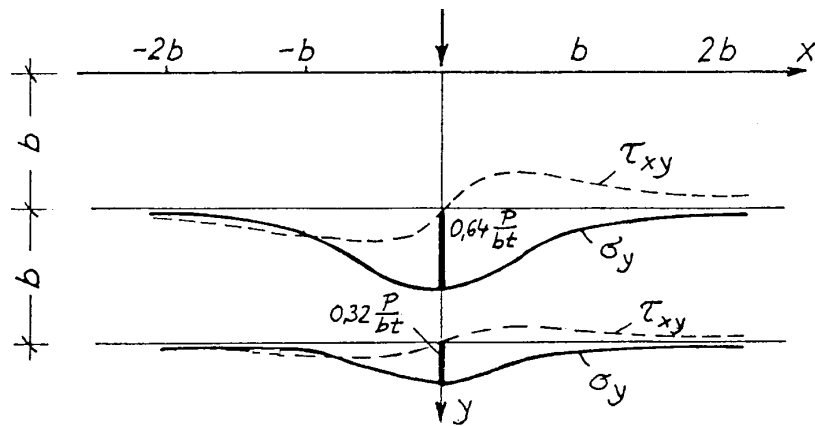


Abbildung 4.2: Verlauf der Spannungskomponenten

Der mit den Gleichungen (4.29), (4.30) und (4.31) beschriebene Spannungszustand soll noch näher betrachtet werden. Dazu werden ebene Polarkoordinaten r und φ eingeführt (Abbildung 4.3), die mit dem kartesischen Koordinaten in der Form $x = r \cos \varphi$ und $y = r \sin \varphi$ verknüpft sind.

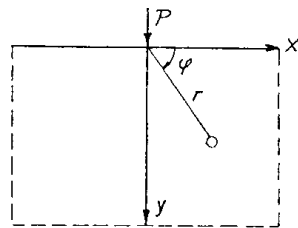


Abbildung 4.3: Einführung von Polarkoordinaten

Dann lassen sich die Spannungen durch Polarkoordinaten ausdrücken und es gilt:

$$\sigma_x = \frac{2P}{\pi h} \frac{\sin \varphi \cos^2 \varphi}{r}, \quad (4.32)$$

$$\sigma_y = \frac{2P}{\pi h} \frac{\sin^3 \varphi}{r}, \quad (4.33)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2P}{\pi h} \frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi}{r}. \quad (4.34)$$

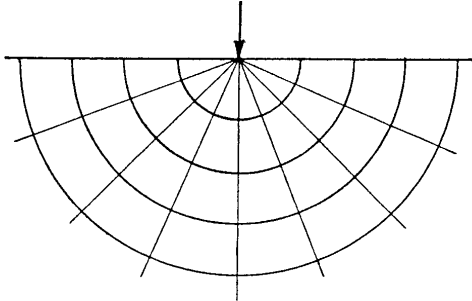


Abbildung 4.4: Linien der Hauptnormalspannungen

Mit den Transformationsformeln für die Spannungen

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{r\varphi} &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi,\end{aligned}$$

kann man dann auf die Spannungskomponenten für die Schnitte des r, φ - Systems übergehen. Man erhält eine Singularität proportional $1/r$:

$$\sigma_r = \frac{2P}{\pi h} \frac{\sin \varphi}{r}, \quad \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{r\varphi} = 0. \quad (4.35)$$

In den betrachteten Schnitten treten also nur Radialspannungen σ_r auf, und die Linien der Hauptnormalspannungen werden demnach von dem durch den Lastangriffspunkt ausgehenden Strahlenbüschel und von den konzentrischen Kreisen gebildet (Abbildung 4.4).

Die Radialspannungen in einem Schnitt $r = \text{konst.}$ verlaufen sinusförmig (siehe Abbildung 4.5).

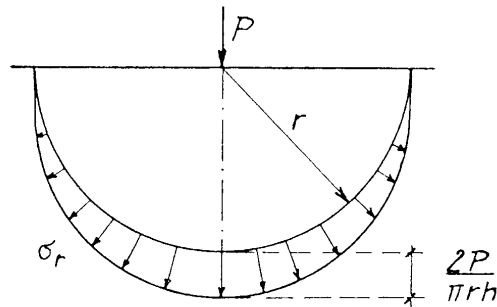


Abbildung 4.5: Verteilung der Radialspannungen

4.3 Der elastische Halbraum unter Wirkung einer Einzellast

Als weiteres Beispiel der Lösung der elastischen Grundgleichungen soll der elastische Halbraum unter der Wirkung einer Einzellast betrachtet werden.

Man geht dazu von den biharmonischen Differentialgleichungen für die Verschiebungen (3.18) aus und wählt als Lösungsansatz für die Verschiebungen die harmonischen Funktionen φ_i und ψ :

$$u_x = \varphi_1 + z \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.36)$$

$$u_y = \varphi_2 + z \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (4.37)$$

$$u_z = \varphi_3 + z \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.38)$$

Die harmonischen Funktionen müssen die Lamé-Navierschen Verschiebungsdifferentialgleichungen erfüllen. Zwischen den φ_i und ψ gilt der Zusammenhang

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = -\frac{1}{3-4\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right). \quad (4.39)$$

Die Spannungen am Rand $z = 0$ sollen als Funktion von x und y in der Form

$$\sigma_z = \phi_1(x, y), \quad \tau_{zx} = \phi_2(x, y), \quad \tau_{zy} = \phi(x, y). \quad (4.40)$$

vorgegeben sein. Diese Spannungen am Rand $z = 0$ können in den Verschiebungen ausgedrückt werden, was durch die Anwendung des Elastizitätsgesetzes und des

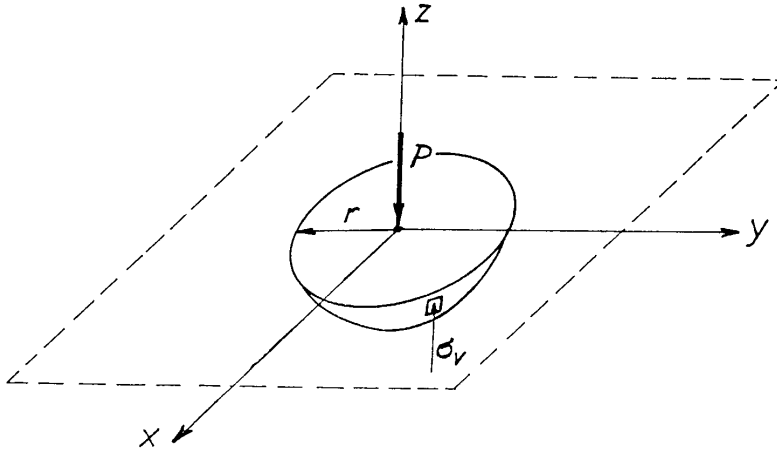


Abbildung 4.6: Der elastische Halbraum mit Einzellast

linearisierten Greenschen Verzerrungstensors in der Form

$$\phi_1 = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right\}, \quad (4.41)$$

$$\phi_2 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right), \quad (4.42)$$

$$\phi_3 = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (4.43)$$

geschieht. Weiterhin nimmt man an, daß zu dem Problem drei harmonische Funktionen ω_1 , ω_2 und ω_3 existieren, für die die Beziehungen

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \omega_1(x, y, 0) = \phi_1(x, y) \quad (4.44)$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \omega_2(x, y, 0) = \phi_2(x, y) \quad (4.45)$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)} \omega_3(x, y, 0) = \phi_3(x, y) \quad (4.46)$$

für den Rand $z = 0$ gültig sind. Setzt man (4.41) bis (4.43) in diese Gleichungen ein,

so erhält man:

$$\omega_1 = 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \quad (4.47)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \quad (4.48)$$

$$\omega_3 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + 2z \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (4.49)$$

Durch Umformen von (4.39)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z} = -2(1-2\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad (4.50)$$

und Einsetzen in die harmonischen Funktionen (4.47) bis (4.49) ergeben sich die Gleichungen

$$\omega_1 = 2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} + 2(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (4.51)$$

$$\omega_2 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4.52)$$

$$\omega_3 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} + \frac{\psi}{\partial y}. \quad (4.53)$$

In diesen Gleichungen bestehen die rechten und die linken Seiten aus harmonischen Funktionen. Nun gilt, daß zwei harmonische Funktionen im Gesamtgebiet identisch sind, wenn sie an den Rändern dieses Gebietes übereinstimmen. Daher können die Funktionen φ_1 , φ_2 und φ_3 eliminiert werden, und ψ kann allein in ω_1 , ω_2 und ω_3 ausgedrückt werden. Nach einer Zwischenrechnung folgt

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right)$$

und nach zweimaliger Integration

$$\psi = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial z} + \frac{\partial \omega_2}{\partial x} + \frac{\partial \omega_3}{\partial y} \right) dz dz. \quad (4.54)$$

Von *Boussinesq* [4] stammt die Lösung dieser Gleichungen für eine auf dem elastischen Halbraum wirkende Einzellast (Abbildung 4.6). Aus den Randbedingungen

$$\tau_{zx} = \phi_2 = 0; \quad \tau_{zy} = \phi_3 = 0 \quad (4.55)$$

ergeben sich die harmonischen Funktionen

$$\omega_2 = 0; \quad \text{und} \quad \omega_3 = 0. \quad (4.56)$$

Es bleibt noch die Funktion $\omega_1(x, y, z)$ zu bestimmen. Schneidet man aus dem Halbraum wie in Abbildung 4.6 skizziert eine Halbkugel mit dem Radius r , so erhält man aus dem Gleichgewicht der Kraftkomponenten in z -Richtung

$$\int_O \sigma_v dA = P.$$

Hierbei bezeichnet O die Oberfläche der Halbkugel. Mit der Einführung einer mittleren, konstanten Vertikalspannung σ_{vm} durch

$$\sigma_{vm} \int dA = \sigma_{vm} \cdot 2\pi r^2$$

gilt dann

$$\sigma_{vm} = \frac{P}{2\pi} \frac{1}{r^2} = \frac{c}{r^2} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (4.57)$$

Die harmonische Funktion ω_1 muß folgenden Randbedingungen genügen:

1. Sie muß überall auf dem Rand verschwinden, nur im Koordinatenursprung einen Wert besitzen.
2. Sie muß wie der Ausdruck $\frac{1}{r^2}$ unendlich werden für den Grenzübergang $r \rightarrow 0$.
3. Als harmonische Funktion muß sie der Gleichung $\Delta\omega_1 = 0$ genügen.

Gewählt wird die Funktion

$$\omega_1 = \frac{c}{r^3}, \quad (4.58)$$

die den genannten Bedingungen genügt. Aus den obigen Gleichungen lassen sich nun die harmonischen Funktionen ψ , φ_1 , φ_2 und φ_3 bestimmen und damit auch die Spannungen. Aus (4.54) folgt mit (4.56) und (4.58)

$$\psi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^z \frac{\partial\omega_1}{\partial z} dz dz = \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (4.59)$$

Eingesetzt in (4.52) erhalten wir

$$\varphi_3 = -\frac{c}{r}(1-\nu) \quad (4.60)$$

und damit aus (4.51)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi_3}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} = -(1-2\nu)\frac{c}{2} \frac{x}{r^3}.$$

Damit ist φ_1 durch

$$\varphi_1 = -(1-2\nu)\frac{c}{2}x \int \frac{dz}{r^3} = -(1-2\nu)\frac{c}{2} \frac{x}{r(r-z)} \quad (4.61)$$

bestimmt und mit (4.53) folgt

$$\varphi_2 = -(1-2\nu)\frac{c}{2}\frac{y}{r(r-z)}. \quad (4.62)$$

Mit diesen Funktionen lassen sich die Verschiebungskomponenten nach (4.36), (4.37) und (4.38) bestimmen:

$$u_x = -\frac{c}{2}\left\{(1-2\nu)\frac{x}{r(r-z)} + \frac{xz}{r^3}\right\}, \quad (4.63)$$

$$u_y = -\frac{c}{2}\left\{(1-2\nu)\frac{y}{r(r-z)} + \frac{yz}{r^3}\right\}, \quad (4.64)$$

$$u_z = -\frac{c}{2}\left\{2(1-\nu)\frac{1}{r} + \frac{z^2}{r^3}\right\}. \quad (4.65)$$

Bei Anwendung des Elastizitätsgesetzes und des linearisierten Greenschen Verzerrungstensors lassen sich nunmehr die gesuchten Spannungskomponenten berechnen. Sie enthalten dann nur noch die Konstante c , die sich über eine Gleichgewichtsbeziehung bestimmen läßt.

Die gegebene Einzellast P muß gleich dem Integral der Normalspannungen in z -Richtung in jeder beliebigen Tiefe $z = -h$ über die gesamte horizontale Ebene in dieser Tiefe sein, d. h. es muß gelten

$$\int \sigma_z ds = -P. \quad (4.66)$$

Daraus läßt sich durch Einsetzen von σ_z die Konstante c ermitteln. Die Spannungs- und Verschiebungskomponenten sind damit bekannt. Die endgültigen Spannungskomponenten lauten (Singularität $\sim 1/r^2$):

$$\sigma_x = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3x^2z}{r^5} - (1-2\nu)\left[\frac{r^2 + rz - z^2}{r^3(r-z)} - \frac{x^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2}\right]\right\}, \quad (4.67)$$

$$\sigma_y = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{3y^2z}{r^5} - (1-2\nu)\left[\frac{r^2 + rz - z^2}{r^3(r-z)} - \frac{y^2(2r-z)}{r^3(r-z)^2}\right]\right\}, \quad (4.68)$$

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{r^5}, \quad (4.69)$$

$$\tau_{yz} = \frac{3P}{2\pi}\frac{yz^2}{r^5}, \quad (4.70)$$

$$\tau_{zx} = \frac{3P}{2\pi}\frac{xz^2}{r^5}, \quad (4.71)$$

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2\pi}\left[\frac{3xyz}{r^5} + (1-2\nu)\frac{xy(2r-z)}{r^3(r-z)^2}\right]. \quad (4.72)$$

In der Abbildung 4.7 ist die Verteilung der Spannungskomponente σ_z in der $x-z$ -Ebene dargestellt. Der Spannungszustand ist rotationssymmetrisch, daher wird $y =$

0 gesetzt. Dann gilt

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(x^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (4.73)$$

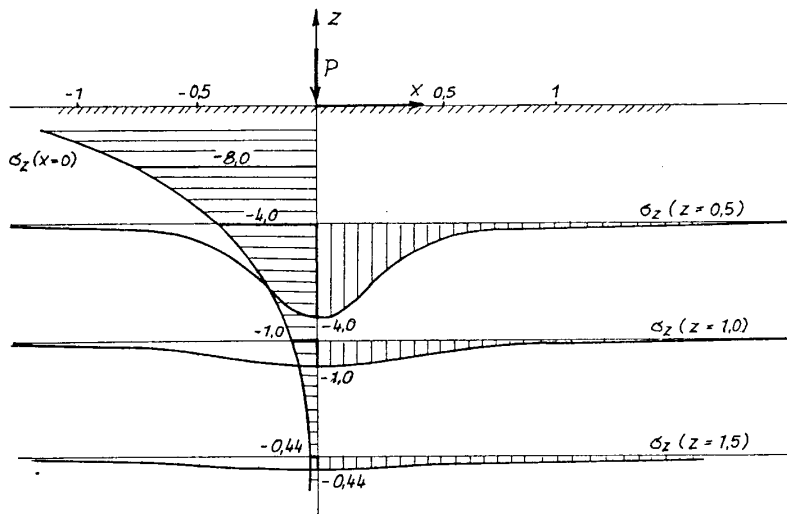


Abbildung 4.7: Verteilung der Spannungskomponente σ_z

Man beachte, daß in Abbildung 4.7 alle für σ_z eingetragenen Werte mit dem Faktor $\frac{3P}{2\pi}$ zu multiplizieren sind.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man zu der Gleichung (4.35) entsprechenden Darstellung gelangt, wenn man zu Polar- bzw. Zylinderkoordinaten übergeht. Dieser Übergang soll hier nicht vollzogen werden, es sei nur auf die entsprechende Literatur, z. B. Girkmann [7], verwiesen.

Zu einer anderen Darstellung der Spannungsverteilung im elastischen Halbraum unter der Belastung einer Einzellast gelangt man durch Zusammenfassen der Spannungskomponenten σ_z , τ_{xz} und τ_{yz} zu einem Spannungsvektor \mathbf{t}_{tz} . Sein Betrag ist

$$\begin{aligned} |\mathbf{t}_{tz}| &= \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} \\ &= \frac{3P}{2\pi} \frac{1}{r^5} \sqrt{z^6 + z^4 x^2 + z^4 y^2} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2}{r^4}. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Wegen der Bedingungen

$$\frac{\sigma_z}{\tau_{xz}} = \frac{z}{x}, \quad \frac{\sigma_z}{\tau_{yz}} = \frac{z}{y} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_{xz}}{\tau_{yz}} = \frac{x}{y} \quad (4.75)$$

hat der Spannungsvektor \mathbf{t}_{tz} die gleiche Richtung wie der Radiusvektor \mathbf{r} . Den geometrischen Ort von Spannungsvektoren gleichen Betrages bestimmt man aus (4.75) zu

$$r^2 = z \sqrt{\frac{3P}{2\pi|\mathbf{t}_{tz}|}}. \quad (4.76)$$

Dies ist die Gleichung einer Kugel, die den Koordinatenursprung und den Lastangriffspunkt in der x - y -Ebene berührt. In Abbildung 4.8 sind die Kugeln als Kreise in der x - z -Ebene dargestellt.

4.4 Die Scheibe mit Loch unter einachsigen Zug

Untersucht wird die in Abbildung 4.9 dargestellte, unendlich ausgedehnte, gelochte Scheibe unter einachsigen Zug.

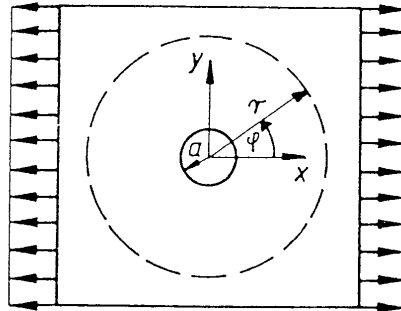


Abbildung 4.9: Gelochte Scheibe unter einachsigen Zug

Die Scheibengleichung (3.73) lautet unter Verwendung von Gleichung (3.74) in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \Delta\Delta F &= F_{,rrrr} + \frac{2}{r}F_{,rrr} - \frac{1}{r^2}(F_{,rr} - 2F_{,rr\varphi\varphi}) \\ &+ \frac{1}{r^3}(F_{,r} - 2F_{,r\varphi\varphi}) + \frac{1}{r^4}(4F_{,\varphi\varphi} + F_{,\varphi\varphi\varphi\varphi}) = 0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Aus F berechnen sich die Spannungen nach (4.12), (4.13) und (4.14) zu

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r^2}F_{,\varphi\varphi} + \frac{1}{r}F_{,r}, \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= F_{,rr}, \\ \tau_{r\varphi} &= -\left(\frac{1}{r}F_{,\varphi}\right)_{,r}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Die Lösung des in Abbildung 4.9 skizzierten Spannungsproblems setzt sich additiv aus

- einem ungestörten Anteil des rotationssymmetrischen, homogener Spannungszustandes der ungelochten Scheibe und
- einem Störanteil infolge des Loches, der achsensymmetrisch zur x - und y -Achse ist,

zusammen. Im folgenden werden zunächst Ansatzfunktionen für den rotationssymmetrischen und achsensymmetrischen Anteil bereitgestellt:

- Rotationsymmetrischer Ansatz $F_1(r)$:

Mit $\frac{\partial}{\partial \varphi}(\bullet) \equiv 0$ bei Rotationsymmetrie vereinfacht sich die Scheibengleichung (4.77) zu

$$\Delta \Delta F_1 = F_{1,rrrr} + \frac{2}{r} F_{1,rrr} - \frac{1}{r^2} F_{1,rr} + \frac{1}{r^3} F_{1,r} = 0. \quad (4.79)$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Eulertyp, die sich mit dem Potenzansatz

$$F = C r^n \quad (4.80)$$

lösen läßt. Es entsteht die charakteristische Gleichung

$$n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) - n(n-1) + n = 0,$$

d. h. $n^2(n-2)^2 = 0$ mit den Wurzeln: $n_{1,2} = 0$; $n_{3,4} = 2$. Wegen der Doppelwurzeln lautet die vollständige Lösung für den rotationssymmetrischen Anteil

$$F_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r. \quad (4.81)$$

- Achsensymmetrischer Ansatz $F_2(r, \varphi)$:

Man macht folgenden sowohl zur x - als auch zur y -Achse symmetrischen Ansatz

$$F_2 = f(r) \cos 2\varphi. \quad (4.82)$$

Damit ergibt sich die Scheibengleichung (4.77) zu

$$\Delta \Delta F_2 = (f_{,rrrr} + \frac{2}{r} f_{,rrr} - \frac{9}{r^2} f_{,rr} + \frac{9}{r^3} f_{,r}) \cos 2\varphi = 0. \quad (4.83)$$

Es entsteht eine gewöhnliche Differentialgleichung vom Eulertyp für f , die wiederum mit dem Produktansatz (4.80) gelöst werden kann. Die charakteristische Gleichung lautet

$$n(n-1)(n-2)(n-3) + 2n(n-1)(n-2) - 9n(n-1) + 9n = 0$$

mit den Wurzeln: $n_1 = 0$, $n_2 = 2$, $n_3 = 4$, $n_4 = -2$. Also lautet die vollständige Lösung für den achsensymmetrischen Anteil

$$F_2(r, \varphi) = (C_5 + C_6 r^2 + C_7 r^4 + C_8 \frac{1}{r^2}) \cos 2\varphi. \quad (4.84)$$

Die Gesamtfunktion F für die gelochte Scheibe erhält man durch Addition des rotationsymmetrischen Anteils F_1 und des achsensymmetrischen Anteils F_2

$$\begin{aligned} F(r, \varphi) &= F_1(r) + F_2(r, \varphi) \\ &= C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r \\ &\quad + (C_5 + C_6 r^2 + C_7 r^4 + C_8 \frac{1}{r^2}) \cos 2\varphi. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Mit der Hilfe der Gleichungen (4.78) lassen sich hieraus die Spannungen berechnen

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \underbrace{2C_2 + \frac{C_3}{r^2} + C_4 (2 \ln r + 1)}_{\text{Rotationsymmetrischer Anteil}} \\ &\quad - \underbrace{\left(4 \frac{C_5}{r^2} + 2C_6 + 6 \frac{C_8}{r^4}\right) \cos 2\varphi}_{\text{Achsensymmetrischer Anteil}}, \end{aligned} \quad (4.86)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} &= \underbrace{2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + C_4 (2 \ln r + 3)}_{\text{Rotationsymmetrischer Anteil}} \\ &\quad + \underbrace{\left(2C_6 + 12C_7 + 6 \frac{C_8}{r^4}\right) \cos 2\varphi}_{\text{Achsensymmetrischer Anteil}}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\varphi} &= \underbrace{\left(-2 \frac{C_5}{r^2} + 2C_6 + 6C_7 r^2 - 6 \frac{C_8}{r^4}\right) \sin 2\varphi}_{\text{Achsensymmetrischer Anteil}} \end{aligned} \quad (4.88)$$

Zur Ermittlung der vollständigen Lösung sind die Ansatzkonstanten C_1 bis C_8 aus den Randbedingungen zu bestimmen. Hierzu führen wir zunächst die folgenden Vorüberlegungen durch:

1. C_1 ist für die Spannungen ohne Bedeutung.
2. Die Spannungen bleiben für die gesamte unendlich ausgedehnte Scheibe beschränkt, d. h. mit den Bedingungen

$$\sigma_{rr}(r \rightarrow \infty, \varphi) \neq \infty \quad \text{und} \quad \sigma_{\varphi\varphi}(r \rightarrow \infty, \varphi) \neq \infty \quad (4.89)$$

folgt sofort

$$C_4 = C_7 = 0. \quad (4.90)$$

3. Der Lochrand ist unbelastet, d. h. für $r = a$ gilt mit (4.86) für jeden beliebigen Winkel φ

$$\sigma_{rr}(r = a, \varphi) = 0. \quad (4.91)$$

Daraus erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$2C_2 + \frac{C_3}{a^2} = 0 \quad \text{und} \quad 2\frac{C_5}{a^2} + C_6 + 3\frac{C_8}{a^4} = 0. \quad (4.92)$$

4. Ebenso gilt für die Schubspannungen am Innenrand

$$\tau_{r\varphi}(r = a, \varphi) = 0 \quad (4.93)$$

und damit erhalten wir die Bedingung

$$\frac{C_5}{a^2} - C_6 + 3\frac{C_8}{a^4} = 0. \quad (4.94)$$

5. Für den belasteten Rand $r \rightarrow \infty$ muß die Spannung der äußeren Belastung entsprechen, d. h.

$$\sigma_{xx} = \sigma_o \quad \text{und} \quad \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0. \quad (4.95)$$

Mit den Drehtransformationsbeziehungen gilt:

$$\sigma_{rr} = \sigma_o \cos 2\varphi = \frac{\sigma_o}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad (4.96)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_o \sin 2\varphi = \frac{\sigma_o}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad (4.97)$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\sigma_o}{2} \sin 2\varphi. \quad (4.98)$$

Aus den Gleichungen (4.86) bis (4.88) erhält man so für $r \rightarrow \infty$ bei Vergleich mit den Gleichungen (4.96) bis (4.98) die Koeffizienten

$$C_2 = \frac{\sigma_o}{4} \quad \text{und} \quad C_6 = -\frac{\sigma_o}{4}. \quad (4.99)$$

Die Gleichungen (4.92) und (4.94) liefern die Koeffizienten

$$C_3 = -\frac{\sigma_o}{2}a^2; \quad C_5 = \frac{\sigma_o}{2}a^2 \quad \text{und} \quad C_8 = -\frac{\sigma_o}{4}a^4. \quad (4.100)$$

Damit erhält man für die Spannungen:

$$\sigma_{rr} = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right) + \left(1 - \frac{4}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} + \frac{3}{\left(\frac{r}{a}\right)^4}\right) \cos 2\varphi \right], \quad (4.101)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{\sigma_o}{2} \left[\left(1 + \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^2}\right) - \left(1 + \frac{3}{\left(\frac{r}{a}\right)^4}\right) \cos 2\varphi \right], \quad (4.102)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\sigma_o}{2} \left[1 + \frac{2}{\left(\frac{r}{a}\right)^2} - \frac{3}{\left(\frac{r}{a}\right)^4} \right] \sin 2\varphi. \quad (4.103)$$

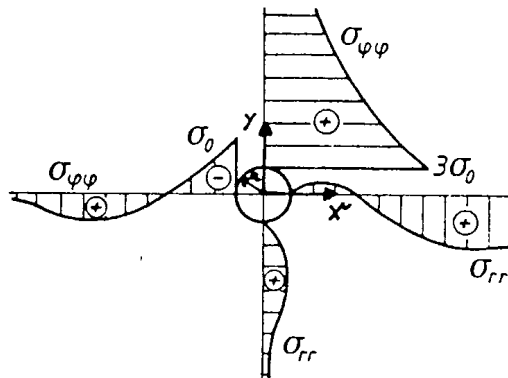


Abbildung 4.10: Spannungsverläufe in der gelochten Scheibe

Im Vergleich mit den Formeln (4.86) bis (4.88) können die rotationssymmetrischen bzw. achsensymmetrischen Anteile der Spannungen identifiziert werden. Die Spannungen sind qualitativ in Abbildung 4.10 dargestellt. Die maximale Normalspannung tritt am Lochrand für $\varphi = \frac{\pi}{2} \hat{=} 90^\circ$ auf. Somit ergibt sich die maximale Normalspannung zu

$$\sigma_{\varphi\varphi}(\varphi = \frac{\pi}{2}, r = a) = 3\sigma_0. \quad (4.104)$$

Damit erhält man am Lochrand einen sogenannten *Spannungskonzentrationsfaktor* K , definiert als

$$K := \frac{\text{Maximale Spannung}}{\text{Spannung in ungelochter Scheibe}} = \frac{3\sigma_0}{\sigma_0} = 3. \quad (4.105)$$

Die Spannungskonzentrationsfaktoren kommen in der Bruchmechanik und bei der Ermüdungsfestigkeitsberechnung (Kerbfaktoren) zur Anwendung.

5 Die schwache Form des Gleichgewichts für die lineare Elastizitätstheorie

Abgesehen von einigen Spezialfällen ist eine analytische Lösung des Randwertproblems (3.6) im Allgemeinen nicht möglich. Um dennoch Lösungen für gegebene Probleme finden zu können, wird der Begriff der *schwachen Lösung* eingeführt. Dazu überführt man das Randwertproblem in eine formal äquivalente schwache Formulierung. Die Zusammenhänge wurden bereits für die eindimensionalen Probleme ausführlich erläutert, siehe das Skript *Einführung in die Finite Elemente Methode - Stabtragwerke* [1].

5.1 Formulierung der schwachen Form

Zur Herleitung einer schwachen Formulierung wird (2.132)

$$\operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion $\mathbf{v} = (v_i)$ multipliziert. Es sei hierbei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Gebiet mit Lipschitz-stetigen Rand und $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in C^2 \times C^1$. Ferner sei $\mathbf{v} = 0$ auf Γ_D . Die Integration über das gesamte Gebiet ergibt dann

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = 0. \quad (5.1)$$

Mit Hilfe von partieller Integration und Anwendung des Divergenztheorems läßt sich die linke Seite umformen. Mit $\hat{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{v} \in C^1(\Omega)$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \operatorname{div} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \end{aligned} \quad (5.2)$$

Aufgrund der Symmetrie von $\hat{\sigma}$ gilt ferner

$$\begin{aligned}\hat{\sigma} : \nabla \mathbf{v} &= \hat{\sigma} : \left[\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) + \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T) \right] \\ &= \hat{\sigma} : \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \\ &= \hat{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}).\end{aligned}\quad (5.3)$$

Für die obigen Beziehungen folgt nach Umsortieren

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \hat{\sigma} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0. \quad (5.4)$$

Nach Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen $\mathbf{t} = \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$ erhält man die schwache Form des Gleichgewichts in der Form

$$\boxed{R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0}. \quad (5.5)$$

5.2 Mathematisch orientierte Notation

Für die später folgende mathematische Behandlung und zur Schreibvereinfachung führen wir an dieser Stelle eine etwas abstraktere Notation ein. Für die virtuelle innere Arbeit führen wir die Bezeichnung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (5.6)$$

und für die virtuelle äußere Arbeit die Bezeichnung

$$F(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (5.7)$$

ein. Hierbei ist $a(\cdot, \cdot)$ eine symmetrische Bilinearform, d.h. linear in beiden Argumenten, so dass $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$. Außerdem ist zu fordern, dass $a(\cdot, \cdot)$ positiv definit ist, d.h. es sei $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$. Ferner ist $F(\cdot)$ eine Linearform (lineares Funktional).

Als Lösungs- und Testraum dient der *Sobolew-Raum*

$$V := \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_D \}, \quad (5.8)$$

mit

$$H^1 := \{ \mathbf{v} \mid \mathbf{v} \in L_2; \partial^1 \mathbf{v} \in L_2 \}. \quad (5.9)$$

Hierbei bezeichnet der *Lebesgue-Raum* $L_2(\Omega)$ den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen auf Ω . Der Raum H^1 besteht also aus allen Funktionen \mathbf{v} , deren erste *schwache Ableitung* $\partial^1 \mathbf{v}$ existiert und quadratisch integrierbar ist.

Die genannten Funktionenräume werden an späterer Stelle noch genauer spezifiziert. Im Moment ist es wichtig zu wissen, dass wir einen Vektorraum V betrachten, der

alle zulässigen Testfunktionen \mathbf{v} und die Lösung \mathbf{u} enthält, so dass $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. Wir nehmen im Moment einfach an, dass V der 'richtige' Funktionenraum ist.

Mit dieser Notation lässt sich die schwache Form auch schreiben als

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (5.10)$$

Allgemein lässt sich das Problem wie folgt formulieren:

Finde ein $\mathbf{u} \in V$, welches die Variationsgleichung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (5.11)$$

erfüllt.

Bemerkung 5.1. Die Bezeichnung Variationsgleichung ergibt sich aus der Tatsache, dass man (5.5) anstatt mittels partieller Integration auch aus der ersten Variation des zugehörigen Energiefunktionals herleiten kann. Dieser Zugang wird in Kap. 6.1 aufgezeigt.

5.3 Darstellung in Matrizenschreibweise

Zur Darstellung der schwachen Form (5.5) in Matrizendarstellung verwenden wir den Spannungsvektor (2.127) und den Verzerrungsvektor (2.57). Die innere virtuelle Arbeit in der schwachen Form, d.h. das Skalarprodukt von Spannungstensor $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u})$ und virtuellem Verzerrungstensor $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v})$

$$\int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (5.12)$$

kann mittels Spannungs- und Verzerrungsvektor ausgedrückt werden. Für das Skalarprodukt gilt beispielsweise im 2D-Fall aufgrund der Symmetrie

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \\ &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{22}\varepsilon_{22} \\ &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ und $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

Die innere Energie kann auch mit Spannungs- und Verzerrungsvektor angegeben werden, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \\ &= \sigma_{11}\varepsilon_{11} + 2\sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Ein Vergleich mit dem Skalarprodukt $\hat{\sigma} : \hat{\varepsilon}$ zeigt, dass die innere virtuelle Arbeit gleich ist. Die schwache Form kann daher für die Koeffizienten einer kartesischen Basis auch in Matrixschreibweise in der Form

$$\boxed{G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})]^T \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b}^T \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}}^T \mathbf{v} d\Gamma = 0} \quad (5.15)$$

geschrieben werden. Für das Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$ und daher

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})]^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0. \quad (5.16)$$

Mit $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \mathbf{D}\mathbf{v}$ und $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{u}$ folgt schließlich

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} [\mathbf{D}\mathbf{v}]^T \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (5.17)$$

bzw.

$$\boxed{R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{D}^T \mathbf{E}\mathbf{D}\mathbf{u} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0} \quad (5.18)$$

6 Die Energieprinzipien für die lineare Elastizitätstheorie

Die Zusammenhänge wurden bereits für die eindimensionalen Probleme ausführlich erläutert, siehe hierzu auch das Skript *Einführung in die Finite Elemente Methode - Stabtragwerke* [1].

Hier zunächst das Hu-Washizu Funktional sowie das Hellinger-Reissner Funktional für die lineare Elastizitätstheorie angeben. Und hieraus auch die schwache Form herleiten bzw. angeben. Siehe Taylor Feap Theory Manual.

6.1 Das Dirichletsche Prinzip

Viele physikalische Probleme lassen sich auf *Variationsprinzipien* zurückführen. Mit dem *Dirichletschen Prinzip* werden Gleichgewichtszustände statischer mechanischer Systeme beschrieben.

Definition 6.1 (Dirichletsches Prinzip). *Ein konservatives mechanisches System befindet sich dann und nur dann im Gleichgewicht, wenn die potentielle Energie Π bezüglich der Lage des Systems stationär ist. Das Gleichgewicht ist genau dann stabil, wenn Π ein echtes Minimum annimmt.*

Das Dirichletsche Prinzip besagt nun, dass die wahre Verschiebung \mathbf{u} die potentielle Energie stationär macht

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a \quad \rightarrow \quad \text{stationär.} \quad (6.1)$$

Einen stationären Punkt findet man, wenn die notwendige Extremalbedingung

$$\delta\Pi = \delta\Pi_i + \delta\Pi_a = 0 \quad (6.2)$$

erfüllt ist. In Worten bedeutet dies: Die erste Variation von Π muss verschwinden. Diese Bedingung ist notwendig, jedoch nicht hinreichend. Eine Aussage über die Art des Extremwertes liefert die zweite Variation von Π ,

$$\delta^2\Pi \begin{cases} > 0 & \rightarrow \text{Minimum;} \\ = 0 & \rightarrow \text{kein Extremwert;} \\ < 0 & \rightarrow \text{Maximum.} \end{cases} \quad (6.3)$$

Bemerkung 6.1. *Der Begriff Extremwert ist historisch begründet und vielleicht etwas unglücklich gewählt, da es sich ja nicht um einzelne Punkte, sondern um Funktionen handelt.*

6.2 Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie

Wir betrachten hyperelastisches Materialverhalten. Es wird vorausgesetzt, dass eine (ausreichend oft differenzierbare) Formänderungsenergiefunktion $W = \hat{W}(\hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}))$ existiert. Für diese Situation geht die Forderung nach Stationarität des Energiefunctionals in das *Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie* über.

Die gesamte potentielle Energie ist gegeben durch

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (6.4)$$

Nach dem Dirichletsche Prinzip liefert die erste Variation der Energie die notwendige Extremalbedingung. Diese erhält man aus der Richtungsableitung

$$\delta\Pi = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (6.5)$$

Betrachten wir die Formänderungsenergiefunktion des Hookeschen Gesetzes (2.161)

$$W = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \mathbb{E} : \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}),$$

dann lässt sich die innere Energie in der Form

$$\Pi_i(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) \, d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) : \mathbb{E} : \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (6.6)$$

angeben.

Die erste Variation führt zu

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{v}) \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma = 0. \quad (6.7)$$

Dies entspricht gerade der schwachen Form aus Gl. (5.5), d.h.

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (6.8)$$

Das Minimalprinzip und die schwache Form sind also äquivalent.

6.2.1 Äquivalenz zur schwachen Form

Wir haben im vorherigen Kapitel gesehen, dass man aus der ersten Variation des Energiefunctionals gerade wieder die schwache Form erhält. Offensichtlich ist das Minimalprinzip in unserem Fall eine alternative Problemformulierung, welche man mit Hilfe der in Kap. 5.2 eingeführten abstrakten Notation folgendermaßen schreiben kann. Finde $\mathbf{u} \in V$, so dass

$$\Pi(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - F(\mathbf{u}) \quad \rightarrow \quad \min \quad (6.9)$$

Hiebei sind

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) := \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{u}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{u}) \, d\Omega \quad (6.10)$$

und

$$F(\mathbf{u}) := \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma. \quad (6.11)$$

Den Zusammenhang von Minimalprinzip und schwacher Form gibt der folgende Satz wieder.

Satz 1 (Charakterisierungssatz). *Es sei V ein Hilbert-Raum und $a(., .)$ eine symmetrische, positive Bilinearform, d.h. es sei $a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \, \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0$. Ferner sei $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Die Größe*

$$\Pi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})$$

nimmt in V genau dann ihr Minimum bei \mathbf{u} an, wenn

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

gilt. Außerdem gibt es höchstens eine Minimallösung.

Das Minimalprinzip und die schwache Form sind also äquivalent.

Beweis. Es seien $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) &= \frac{1}{2} a(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) - F(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} [a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + 2\varepsilon a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v})] - [F(\mathbf{u}) + \varepsilon F(\mathbf{v})]. \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (6.9) gilt somit

$$\Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{u}) + \varepsilon [a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}).$$

Falls \mathbf{u} der schwachen Form genügt, ist $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0$ und somit für $\varepsilon = 1$

$$\Pi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \Pi(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > \Pi(\mathbf{u}) \quad \text{falls } \mathbf{v} \neq 0.$$

Diese Beziehung beschreibt das Anwachsen von Π bei Entfernung vom Minimalpunkt \mathbf{u} . Aufgrund dessen, dass $\Pi(\mathbf{u} + \mathbf{v}) > \Pi(\mathbf{u})$ ist \mathbf{u} ein eindeutiger Minimalpunkt, d.h. \mathbf{u} minimiert das Funktional Π . Umgekehrt bedeutet dies, wenn Π bei \mathbf{u} ein Minimum hat, verschwindet für jedes $\mathbf{v} \in V$ die Ableitung

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right|_{\varepsilon=0}$$

d.h.

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \left[\Pi(\mathbf{u}) + \varepsilon [a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v})] + \frac{1}{2} \varepsilon^2 a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} = 0.$$

Dies entspricht gerade der ersten Variation von Π und es folgt die Aussage aus Satz 1

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \Pi(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right|_{\varepsilon=0} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

bzw.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

□

6.3 Das Hu-Washizu Funktional der linearen Elastizität

6.4 Das Hellinger-Reissner Funktional der linearen Elastizität

7 Diskretisierung der Scheibe mit finiten Elementen

Im Rahmen der Methode der finiten Elemente finden verschiedene Approximationen statt. Ein Teil ist hierbei die Diskretisierung des betrachteten Gebietes. Ziel ist es, das Gebiet durch finite Elemente so gut wie möglich anzunähern. Ein zweiter Teil besteht in der Approximation der Feldgrößen, wie Verschiebungen, Spannungen etc.

7.1 Vorbemerkungen

Zur numerischen Lösung des stetigen schwachen Problems (5.5)

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (7.1)$$

wird dieses in ein diskretes Problem überführt. Die als *Galerkin-Verfahren*¹ bekannte Diskretisierung dieser Gleichung besteht nun darin, sie nicht mehr im unendlich dimensionalen Raum V , sondern im endlich dimensionalen Teilraum $V_h \subset V$ zu lösen.

Das zum stetigen Variationsproblem (5.5) gehörige diskrete Variationsproblem lautet dann: Finde ein $\mathbf{u}_h \in V_h$, welches die diskrete Variationsgleichung

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - F(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V \quad (7.2)$$

erfüllt. Die Lösung \mathbf{u}_h ist im Allgemeinen eine Näherungslösung, so dass $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h \in V_h \subset V$. Bei einfachen Elementen, wie beispielsweise bei Dehnstäben oder Balken, können jedoch auch exakte Lösungen gefunden werden.

Der Index h steht hierbei für einen Diskretisierungsparameter (z.B. Elementlänge oder charakteristischer Elementdurchmesser) und deutet darauf hin, dass mit $h \rightarrow 0$ Konvergenz gegen die starke Lösung (also die exakte Lösung) erreicht werden soll. Wenn also im Folgenden eine diskrete Größe gemeint ist, dann bekommt diese den Index h .

Im Groben lässt sich die Methode der finiten Elemente wie folgt beschreiben:

1. Diskretisierung: Man zerlegt das Gebiet Ω in eine endliche Anzahl Teilgebiete Ω_e einfacher Gestalt, die finiten Elemente.
2. In jedem Teilgebiet (Element) sollen die Funktionen $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h$ Polynome sein, und zwar mit üblicherweise demselben Polynomgrad in jedem Element.

¹BORIS GRIGORIEVICH GALERKIN (1871 – 1945), russischer Mathematiker.

3. Die daraus resultierenden stückweise zusammengesetzten Funktionen sollen global über alle Elemente eine gewisse Glattheit C^k besitzen. Man spricht dann auch von C^k -Elementen. Um eine sogenannte *konforme Approximation* zu erhalten, muss in jedem Fall $V_h \subset V$ erfüllt sein.

Die Diskretisierung des Gebietes Ω erfolgt durch die Unterteilung des Gebietes in einfach zu beschreibende Teilgebiete (finite Elemente) Ω_e :

$$\Omega \approx \Omega_h := \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} \Omega_e \quad (7.3)$$

Hierbei steht der Operator \bigcup symbolisch für die Assemblierung, d.h. für den Zusammenbau der einzelnen Teilgebiete Ω_e zum Gesamtgebiet Ω .

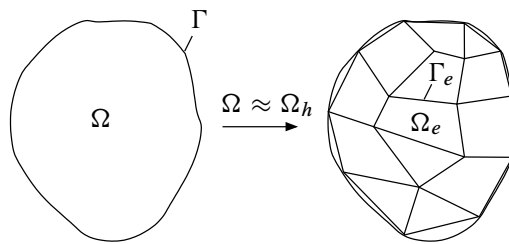


Abbildung 7.1: Zerlegung des Gebietes Ω in finite Elemente Ω_e

Der Rand $\Gamma_e = \partial\Omega_e$ eines finiten Elementes Ω_e setzt sich aus Punkten (1D), Kanten (2D) oder Flächen (3D) zusammen, welche im Folgenden mit $\gamma(\Omega_e)$ bezeichnet werden. Damit lässt sich die Menge aller Punkte, Kanten bzw. Flächen darstellen als

$$\Gamma_h = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_h} \gamma(\Omega_e). \quad (7.4)$$

Das durch die Diskretisierung entstehende FE-Netz muss zulässig sein.

Definition 7.1. Ein FE-Netz ist zulässig, wenn folgende Eigenschaften erfüllt werden:

1. $\tilde{\Omega} = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} \Omega_e$.
2. Alle Ω_e müssen ein positives Volumen besitzen.
3. Zwei Elemente Ω_e dürfen sich entweder in einem gemeinsamen Punkt, einer gemeinsamen Kante, einer gemeinsamen Fläche oder gar nicht schneiden.

Die Zerlegung des Gebietes ist erforderlich, um eine bereichsweise Auswertung der schwachen Form durchführen zu können. Eine Funktion g über Ω kann in der Form

$$\int_{\Omega} g \, d\Omega = \sum_{e=1}^N \int_{\Omega_e} g_e \, d\Omega$$

berechnet werden. Hierbei bezeichnet Ω_e das Gebiet eines finiten Elementes. Um die auftretenden Integrale leicht berechnen zu können, und um eine systematische Behandlung innerhalb eines FE-Systems zu ermöglichen, werden hierbei i.d.R. einfache Elementformen, wie Dreiecke oder Vierecke mit geraden Kanten eingeführt. Dies hat zur Folge, dass das Gebiet Ω nur noch approximiert werden kann, d.h. $\Omega \approx \Omega_h$, vgl. Abb. 7.1. Innerhalb der Teilbereiche Ω_e werden die kontinuierlichen Größen, wie Verschiebungen und Verzerrungen mit Hilfe von Form- und Ansatzfunktionen, sowie diskreten Knotengrößen approximiert.

Bemerkung 7.1. *Es existieren auch Elementformulierungen, bei denen keine geraden Kanten verwendet werden. Durch Einführung zusätzlicher Knoten auf dem Rand können dann auch quadratische, kubische etc. Kantenverläufe dargestellt werden. Diese Elemente werden als höherwertige Elemente bezeichnet.*

7.2 Das isoparametrische Konzept

Im Rahmen der Methode der finiten Elemente kommt zur Approximation von Feldgrößen und Geometrie häufig das *isoparametrische Konzept*² zum Einsatz. Beim isoparametrischen Konzept werden die Feldgrößen (z.B. Verschiebungen \mathbf{u}) und die Geometrie des betrachteten Gebietes X mit Hilfe der gleichen Ansatzfunktionen h_i im Element Ω_e approximiert, d.h. für die Spaltenmatrizen der Koeffizienten bezüglich einer kartesischen Basis gilt

$$X \approx X_h = \sum_{I=1}^n h_I X^I \quad (7.5)$$

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{u}^I \quad (7.6)$$

Hierbei bezeichnen X^I bzw. \mathbf{u}^I die Spaltenmatrizen mit den diskreten Knotengrößen am Knoten I .

Generell ist es natürlich möglich unterschiedliche Ansatzfunktionen für Geometrie und Verschiebung zu wählen. Aufgrund der Flexibilität und generellen Anwendbarkeit hat sich jedoch das isoparametrische Konzept durchgesetzt.

²Iso kommt aus dem Griechischen und bedeutet 'gleich'.

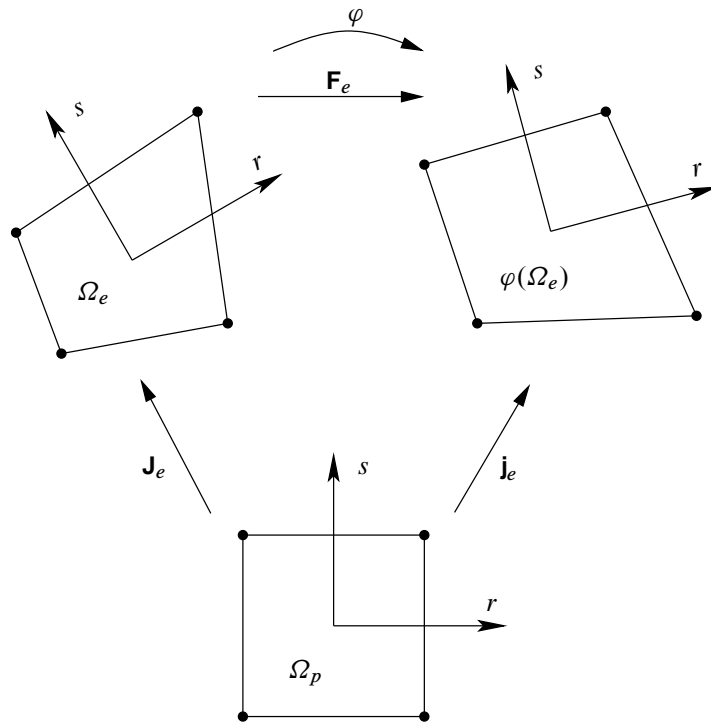


Abbildung 7.2: Isoparametrische Abbildung

Die Ansatzfunktionen werden bezüglich einer Referenzkonfiguration (Referenzelement oder Parameterraum) Ω_p formuliert, siehe Abb. 7.2. Zur Beschreibung der Abbildungen von der Referenzkonfiguration Ω_p in die undeformierte Konfiguration Ω_e und in die deformierte Konfiguration $\varphi(\Omega_e)$ werden in Matrixschreibweise die Gradienten

$$\mathbf{J}_e := \nabla_r \mathbf{X}_h = \frac{\partial \mathbf{X}_h}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} X_{1,r} & X_{1,s} \\ X_{2,r} & X_{2,s} \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{j}_e := \nabla_r \mathbf{x}_h = \frac{\partial \mathbf{x}_h}{\partial \mathbf{r}} = \begin{bmatrix} x_{1,r} & x_{1,s} \\ x_{2,r} & x_{2,s} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

sowie die zugehörigen Determinanten

$$J_e = \det \mathbf{J}_e \quad (7.9)$$

$$j_e = \det \mathbf{j}_e \quad (7.10)$$

eingeführt. Diese Vorgehensweise ist analog zur Bestimmung des Deformationsgradienten \mathbf{F} siehe Gl. (2.28).

7.2.1 Ansatzfunktionen

7.2.1.1 Konstruktion der Ansatzfunktionen

Die Idee der FE-Methode besteht nun darin, in jedem Element den Verlauf der wahren Lösung mit Hilfe von möglichst einfachen Funktionen zu approximieren. Diese einfachen Funktionen innerhalb eines Intervalls bezeichnet man als *Ansatzfunktionen*. Diese besitzen nur in einem kleinen Teilgebiet des Definitionsbereichs einen von Null verschiedenen Wert. Der Lösungsansatz ergibt sich dann aus der Überlagerung der Ansatzfunktionen der einzelnen Teilgebiete (Elemente). Grundsätzlich können beliebige Funktionen zur Konstruktion von Ansatzfunktionen verwendet werden, aber es hat sich durchgesetzt, dass man hierfür Polynome verwendet, da diese sehr einfach zu handhaben sind.

Im zweidimensionalen Raum können Ansatzfunktionen durch Polynome der Form

$$F(r, s) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^p a_{ij} r^i s^j \tag{7.11}$$

dargestellt werden. Die zu dem Polynomgrad korrespondierenden Terme können dem *Pascalschen Dreieck*³ (ohne Koeffizienten a_{ij}) entnommen werden, siehe Abb. 7.3. Die Koeffizienten a_{ij} können berechnet werden, in dem die Interpolationsbedingungen der Ansatzfunktionen berücksichtigt werden.

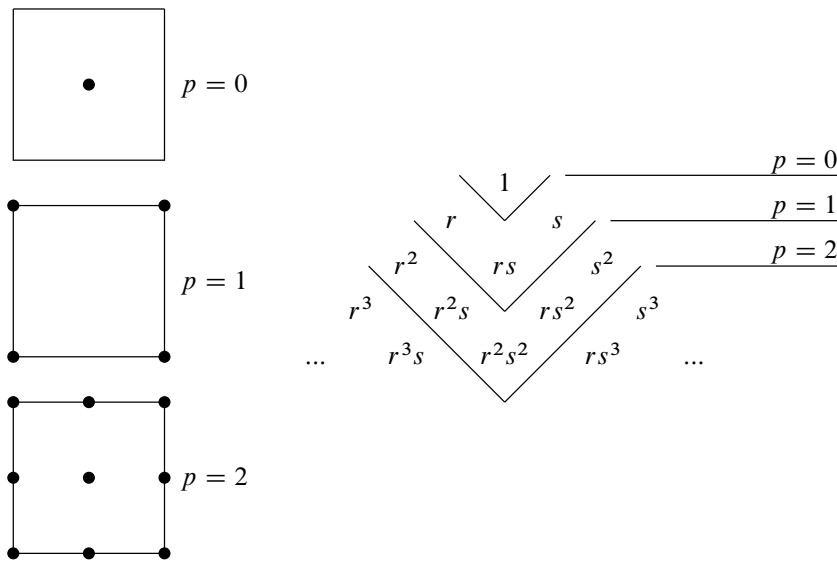


Abbildung 7.3: Pascalsches Dreieck für zweidimensionale Ansatzfunktionen

Eine andere Möglichkeit besteht darin, dass man eindimensionale Ansätze miteinander multipliziert. Eine Interpolation zwischen den vorgegebenen Funktionswerten

³BLAISE PASCAL (1623-1662), französischer Mathematiker, Physiker, Literat und Philosoph.

an n Stützstellen r_i lässt sich im eindimensionalen Fall mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange

$$h_i(r) = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{r - r_j}{r_i - r_j} \quad (7.12)$$

durchführen. Für den zweidimensionalen Fall lässt sich eine Interpolation zwischen $m \times n$ Stützstellen \mathbf{r}_{ik} mit

$$h_{ik}(r, s) = \left(\prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{r - r_j}{r_i - r_j} \right) \cdot \left(\prod_{k=1, k \neq l}^n \frac{r - r_l}{r_k - r_l} \right) \quad (7.13)$$

bestimmen. Im dreidimensionalen Fall gilt bei $n \times m \times p$ Stützstellen \mathbf{r}_{iku}

$$h_{iku}(r, s, t) = \left(\prod_{j=1, j \neq i}^m \frac{r - r_j}{r_i - r_j} \right) \cdot \left(\prod_{k=1, k \neq l}^n \frac{r - r_l}{r_k - r_l} \right) \cdot \left(\prod_{v=1, v \neq u}^p \frac{r - r_v}{r_u - r_v} \right). \quad (7.14)$$

Die Ansatzfunktionen des Elements müssen bestimmte Eigenschaften erfüllen:

- die Interpolationseigenschaften müssen erfüllt werden,
- zumindest konstante Verzerrungen müssen geliefert werden und
- die approximierten Größen müssen im Element Ω_e stetig sein.

7.2.1.2 Bilineare Ansatzfunktionen

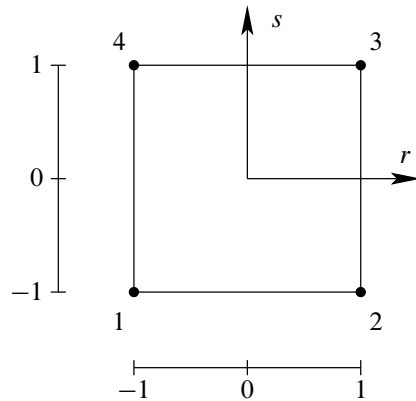
Wir betrachten ein vierknotiges Element. Die Nummerierung der Knoten erfolgt gegen den Uhrzeigersinn. Nach dem isoparametrischen Konzept wird die Geometrie eines Elements auf ein Referenzelement oder Parameterraum Ω_p abgebildet, siehe Abb. 7.4

Die Knotenkoordinaten $\mathbf{r}^i = [r_i; s_i]^T$ des Referenzelementes sind gegeben durch $\mathbf{r}^1 = [-1; -1]^T$, $\mathbf{r}^2 = [1; -1]^T$, $\mathbf{r}^3 = [1; 1]^T$ und $\mathbf{r}^4 = [-1; 1]^T$.

Die Ansatzfunktionen bezogen auf das Referenzelement ergeben sich damit zu

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{r - r_0^2}{r_0^1 - r_0^2} \cdot \frac{s - s_0^4}{s_0^1 - s_0^4} = \frac{r - 1}{-1 - 1} \cdot \frac{s - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{4}(r - 1) \cdot (s - 1) \\ h_2 &= \frac{r - r_0^1}{r_0^2 - r_0^1} \cdot \frac{s - s_0^3}{s_0^2 - s_0^3} = \frac{r + 1}{1 + 1} \cdot \frac{s - 1}{-1 - 1} = \frac{1}{4}(r + 1) \cdot (1 - s) \\ h_3 &= \frac{r - r_0^4}{r_0^3 - r_0^4} \cdot \frac{s - s_0^2}{s_0^3 - s_0^2} = \frac{r + 1}{1 + 1} \cdot \frac{s + 1}{1 + 1} = \frac{1}{4}(r + 1) \cdot (s + 1) \\ h_4 &= \frac{r - r_0^3}{r_0^4 - r_0^3} \cdot \frac{s - s_0^1}{s_0^4 - s_0^1} = \frac{r - 1}{-1 - 1} \cdot \frac{s + 1}{1 + 1} = \frac{1}{4}(1 - r) \cdot (s + 1) \end{aligned} \quad (7.15)$$

Die Ansatzfunktionen besitzen die fundamentalen Eigenschaften

Abbildung 7.4: Referenzelement oder Parameterraum Ω_p

- am Knoten 1 ist $h_1 = 1$ und alle anderen $h_2 = h_3 = h_4 = 0$
- am Knoten 2 ist $h_2 = 1$ und alle anderen $h_1 = h_3 = h_4 = 0$
- am Knoten 3 ist $h_3 = 1$ und alle anderen $h_2 = h_1 = h_4 = 0$
- am Knoten 4 ist $h_4 = 1$ und alle anderen $h_2 = h_3 = h_1 = 0$

Die Ansatzfunktion h_i besitzt also am Knoten i den Wert 1 und an allen anderen Knoten den Wert 0, siehe Abb. 7.5.

Die bilinearen Ansatzfunktionen sind gegeben durch

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \frac{1}{4}(r-1)(s-1) \\
 h_2 &= \frac{1}{4}(r+1)(1-s) \\
 h_3 &= \frac{1}{4}(r+1)(s+1) \\
 h_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(s+1)
 \end{aligned}
 \tag{7.16}$$

Ferner werden im Folgenden noch die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach r und s benötigt. Die ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
 h_{1,r} &= \frac{1}{4}(s-1) & h_{1,s} &= \frac{1}{4}(r-1) \\
 h_{2,r} &= \frac{1}{4}(-s+1) & h_{2,s} &= \frac{1}{4}(-r-1) \\
 h_{3,r} &= \frac{1}{4}(s+1) & h_{3,s} &= \frac{1}{4}(r+1) \\
 h_{4,r} &= \frac{1}{4}(-s-1) & h_{4,s} &= \frac{1}{4}(-r+1)
 \end{aligned}
 \tag{7.17}$$

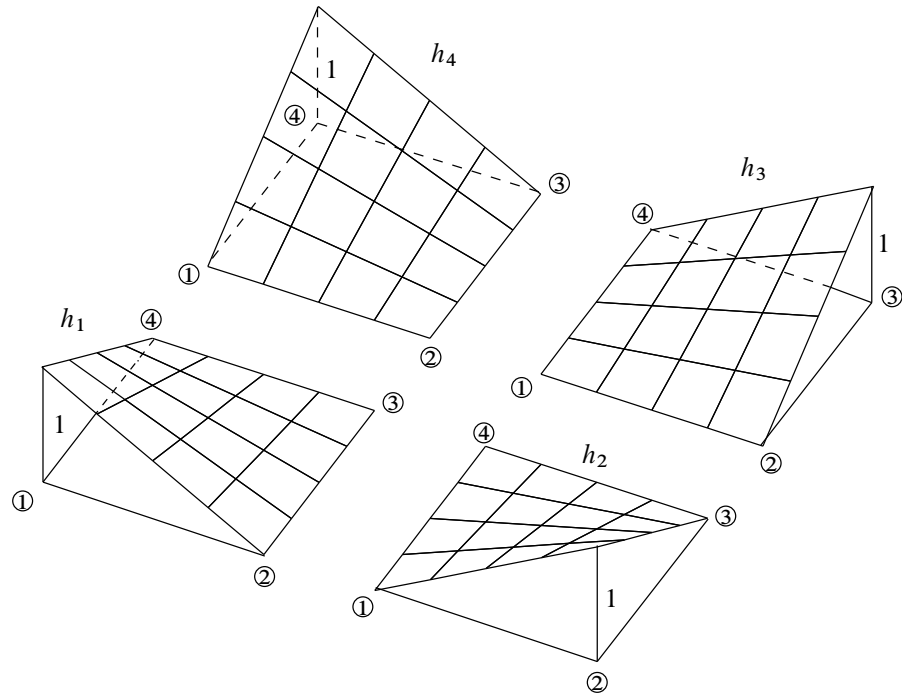


Abbildung 7.5: Bilineare Ansatzfunktionen

7.2.2 Approximation der Geometrie

Die Approximation der Geometrie eines Elementes mit n Knoten erfolgt mittels

$$\mathbf{x}_h = \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{X}^I. \quad (7.18)$$

Wir betrachten im Folgenden ein Viereckelement mit 4 Knoten und führen für dieses Element einen Vektor mit den Knotenkoordinaten

$$\hat{\mathbf{X}}_e = [X_1^1 \quad X_2^1 \quad X_1^2 \quad X_2^2 \quad X_1^3 \quad X_2^3 \quad X_1^4 \quad X_2^4]^T \quad (7.19)$$

ein. Die Knotenwerte werden mit $\hat{\cdot}$ bezeichnet. Der untere Index bezeichnet die Richtung und der obere Index gibt die Knotennummer an.

Die Ansatzfunktionen h_i werden in einer Matrix \mathbf{H} derart zusammengefasst, dass die Approximation der Elementgeometrie auch in der Form

$$\begin{aligned}
 \mathbf{X}_h &= \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{X}^I = \sum_{I=1}^n h_I \begin{bmatrix} X_1^I \\ X_2^I \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ \hline X_1^2 \\ X_2^2 \\ \hline X_1^3 \\ X_2^3 \\ \hline X_1^4 \\ X_2^4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}}_e \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

dargestellt werden kann. Die Matrix

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \quad (7.21)$$

ist hierbei die Matrix der Ansatzfunktionen.

$$\boxed{\mathbf{X}_h = \mathbf{H} \hat{\mathbf{X}}_e} \quad (7.22)$$

Gegebene Punkte im Parameterraum in r und s Koordinaten können damit direkt in die zugehörigen X_1 und X_2 Koordinaten abgebildet werden.

Beispiel 7.1 (Beispiel zur Koordinatentransformation). Gegeben seien die in Abb. 7.6 dargestellten Elemente ($a - c$) in der undeformierten Konfiguration sowie die Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}'(r, s) = [-0.5 \ -0.5]^T$ im Parameterraum. Gesucht seien die zugehörigen X_1 und X_2 Koordinaten des Punktes $\mathbf{P}(X_1, X_2)$ der Elemente ($a - c$).

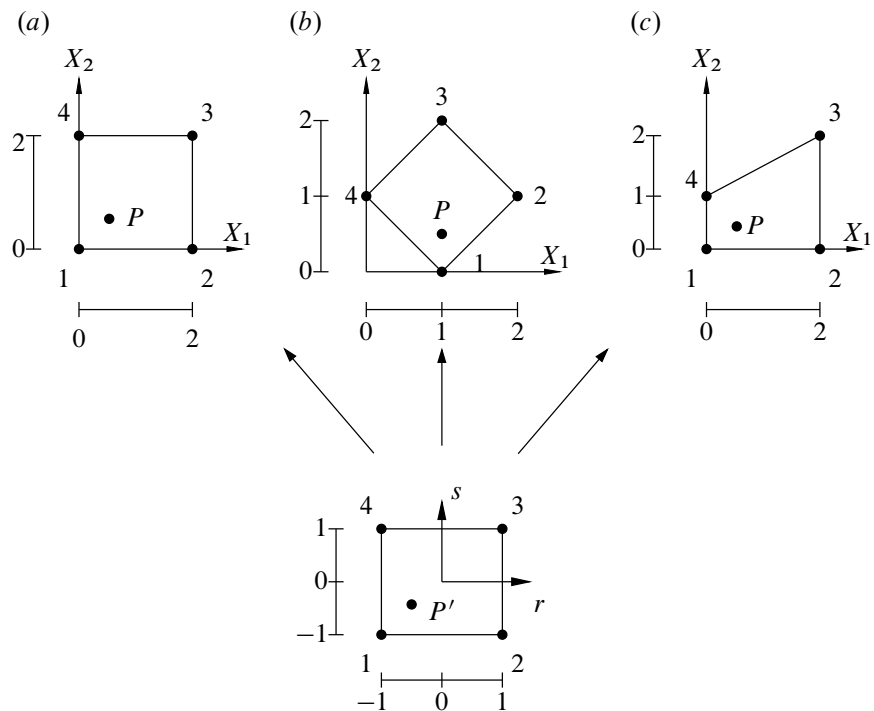


Abbildung 7.6: Beispiel zur Koordinatentransformation

Einsetzen der Koordinaten $r = -0.5$ und $s = -0.5$ in die Ansatzfunktionen liefert

$$\begin{aligned}
 h_1\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} \\
 h_2\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16} \\
 h_3\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16} \\
 h_4\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Damit folgt die Matrix der Ansatzfunktionen in der Form

$$\mathbf{H}\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \tag{7.24}$$

Element a)

$$\begin{aligned}
X_h &= \mathbf{H}(-0.5; -0.5)\hat{X}_e \\
&= \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{P}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Element b)

$$\begin{aligned}
X_h &= \mathbf{H}(-0.5; -0.5)\hat{X}_e \\
&= \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \mathbf{P}
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Element c)

$$\begin{aligned}
X_h &= \mathbf{H}(-0.5; -0.5)\hat{X}_e \\
&= \begin{bmatrix} \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 \\ 0 & \frac{9}{16} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \frac{3}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 5/16 \end{bmatrix} = \mathbf{P}
\end{aligned} \tag{7.27}$$

7.2.3 Approximation der Verschiebung

Die Approximation der Verschiebung eines Elementes mit n Knoten erfolgt mittels

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h = \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{u}^I. \quad (7.28)$$

Für ein Viereckelement mit 4 Knoten ist der Vektor mit den Knotenverschiebungen gegeben durch

$$\mathbf{u}_e = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_1^3 \quad u_2^3 \quad u_1^4 \quad u_2^4]^T \quad (7.29)$$

Mit Hilfe der Matrix der Ansatzfunktionen kann die obige Beziehung ausgedrückt werden durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{u}^I = \sum_{I=1}^n h_I \begin{bmatrix} u_1^I \\ u_2^I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \\ u_1^3 \\ u_2^3 \\ u_1^4 \\ u_2^4 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \mathbf{u}_e \end{aligned} \quad (7.30)$$

Zur Approximation der Testfunktion \mathbf{v} verwenden wir die gleichen Ansatzfunktionen wie für die Verschiebung. Damit folgt für die Approximation der Testfunktion

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}_h = \sum_{I=1}^n h_I \mathbf{u}^I = \mathbf{H} \mathbf{v}_e. \quad (7.31)$$

Bemerkung 7.2. Im Rahmen des Galerkin-Verfahrens können prinzipiell unterschiedliche Ansatzfunktionen für Verschiebung und Testfunktion verwendet werden. Hieraus resultieren jedoch unsymmetrische Systemmatrizen, was einen erhöhten numerischen Aufwand nach sich zieht. Im Rahmen dieses Skriptes werden ausschließlich die gleichen Funktionen zur Approximation von Verschiebung und Testfunktion verwendet.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{u}_h &= \mathbf{H} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{v}_h &= \mathbf{H} \mathbf{v}_e \end{aligned}} \quad (7.32)$$

7.2.4 Approximation der Verzerrungen

Die Verzerrungen lassen sich mit Hilfe des Verzerrungsvektors $\boldsymbol{\varepsilon}$ nach Gl. (2.59) im 2D-Fall angeben als

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (7.33)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

Mit Hilfe der Approximation der Verschiebung folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon} \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{D}\mathbf{u}_h = \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{u}_e = \mathbf{B}\mathbf{u}_e. \quad (7.34)$$

Hierbei bezeichnet

$$\mathbf{B} := \mathbf{D}\mathbf{H} \quad (7.35)$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} h_{1,1} & 0 & h_{2,1} & 0 & h_{3,1} & 0 & h_{4,1} & 0 \\ 0 & h_{1,2} & 0 & h_{2,2} & 0 & h_{3,2} & 0 & h_{4,2} \\ h_{1,2} & h_{1,1} & h_{2,2} & h_{2,1} & h_{3,2} & h_{3,1} & h_{4,2} & h_{4,1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial X_2} \\ \frac{\partial h_1}{\partial X_2} & \frac{\partial h_1}{\partial X_1} & \frac{\partial h_2}{\partial X_2} & \frac{\partial h_2}{\partial X_1} & \frac{\partial h_3}{\partial X_2} & \frac{\partial h_3}{\partial X_1} & \frac{\partial h_4}{\partial X_2} & \frac{\partial h_4}{\partial X_1} \end{bmatrix}$$

den \mathbf{B} -Operator. Dieser enthält die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen

$$h_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial X_j}. \quad (7.36)$$

Für die Approximation der virtuellen Verzerrungen folgt

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \approx \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) = \mathbf{D}\mathbf{v}_h = \mathbf{D}\mathbf{H}\mathbf{v}_e = \mathbf{B}\mathbf{v}_e. \quad (7.37)$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_h^e(\mathbf{u}_h) = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \\ \boldsymbol{\varepsilon}_h^e(\mathbf{v}_h) = \mathbf{B}\mathbf{v}_e \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

7.2.5 Jacobi Transformation

Die Bestimmung des B-Operators zur Berechnung der Verzerrungen, erfordert die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach X_j , d.h.

$$h_{i,j} = \frac{\partial h_i}{\partial X_j}. \quad (7.39)$$

Die Ansatzfunktionen $h_i(r, s)$ sind im Parameterraum definiert. Wir suchen daher eine Verknüpfung von $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{r}}$ mit $\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}}$.

Nach der Kettenregel gilt für eine Größe $(\cdot)(X_1, X_2)$ mit $X_1(r, s)$, $X_2(r, s)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial r} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} &= \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_1} \frac{\partial X_1}{\partial s} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} \frac{\partial X_2}{\partial s} \end{aligned} \quad (7.40)$$

bzw. in Matrizenform

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_2}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J}^T \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (7.41)$$

Die hierbei entstehende Matrix

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_2}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{1,r} & X_{2,r} \\ X_{1,s} & X_{2,s} \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

ist gerade die Transponierte des in Gl. (7.7) eingeführten Gradienten \mathbf{J} . Die Matrix \mathbf{J} wird als *Jacobi-Matrix* oder *Funktionalmatrix* bezeichnet.

Für die inverse Beziehung gilt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-T} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.43)$$

Die transponierte inverse Jacobi-Matrix kann im 2D-Fall direkt angegeben werden

$$\mathbf{J}^{-T} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_1}{\partial r} \end{bmatrix}. \quad (7.44)$$

Hierbei bezeichnet

$$\det \mathbf{J} = \frac{\partial X_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial s} - \frac{\partial X_2}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial s} \quad (7.45)$$

die *Jacobi-Determinante* oder *Funktionaldeterminante*. Man beachte, dass \mathbf{J}^{-1} nur existiert, wenn $\det \mathbf{J} \neq 0$.

Die Jacobi-Determinante spielt eine wichtige Rolle bei der Transformation von integralen Größen. Eine Größe (\cdot) , welche in der Ausgangskonfiguration Ω definiert ist, kann in den Parameterraum transformiert werden. Es gilt für die Transformation des Elementes Ω_e ins Referenzelement aus Abb. 7.4

$$\int_{\Omega_e} (\cdot) d\Omega = \int_r \int_s (\cdot) \det \mathbf{J} ds dr = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\cdot) \det \mathbf{J} ds dr. \quad (7.46)$$

Mit der inversen Jacobi-Matrix können nun die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach X_1 und X_2 angegeben werden. Für die Ansatzfunktion h_i gilt

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial h_i}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-T} \frac{\partial h_i}{\partial \mathbf{r}} \quad (7.47)$$

Die hierbei auftretenden partiellen Ableitungen von h_i nach r und s wurden für das Viereckelement bereits in Gl. (7.17) angegeben.

7.3 Diskretisierung der schwachen Form

7.3.1 Zerlegung der schwachen Form in Elementanteile

Für eine bereichsweise Auswertung der schwachen Form zerlegen wir (5.5) in die Anteile eines jeden Elementes Ω_e . Die schwache Form lässt sich dann darstellen als

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \approx R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} R_e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad (7.48)$$

wobei \mathbf{u}_h und \mathbf{v}_h die Approximationen der Verschiebungen bzw. Testfunktionen innerhalb eines Elementes Ω_e sind. Ferner steht der Operator \bigcup symbolisch für die Assemblierung, d.h. für den Zusammenbau der einzelnen Teilgebiete Ω_e zum Gesamtgebiet Ω_h .

Für die in der schwachen Form auftretenden Integrale folgt

$$\int_{\Omega} (\dots) d\Omega \approx \int_{\Omega_h} (\dots) d\Omega_h = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} \int_{\Omega_e} (\dots) d\Omega_e. \quad (7.49)$$

7.3.2 Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor

Wir betrachten die schwache Form (5.15)

$$R(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7.50)$$

Die FE-Approximation dieser Gleichung für ein Element ist gegeben durch

$$R_e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h)^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) d\Omega - \int_{\Omega_e} (\mathbf{v}_h)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_e} (\mathbf{v}_h^e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7.51)$$

Mit

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h^e) = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}_h^e(\mathbf{u}_h) = \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_e \quad (7.52)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_h) = \boldsymbol{\varepsilon}_h(\mathbf{v}_h) = \mathbf{B} \mathbf{v}_e \quad (7.53)$$

$$\mathbf{v}_h^e = \mathbf{H} \mathbf{v}_e \quad (7.54)$$

folgt

$$\begin{aligned} R_e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \int_{\Omega_e} (\mathbf{B} \mathbf{v}_e)^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_e d\Omega - \int_{\Omega_e} (\mathbf{H} \mathbf{v}_e)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_e} (\mathbf{H} \mathbf{v}_e)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \\ &= \int_{\Omega_e} \mathbf{v}_e^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \mathbf{u}_e d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{v}_e^T \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \mathbf{v}_e^T \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Die Vektoren \mathbf{u}_e und \mathbf{v}_e enthalten die diskreten Knotengrößen für Verschiebung bzw. Testfunktion. Diese hängen nicht mehr von \mathbf{X} ab und können daher aus den Integralen gezogen werden. Es folgt eine Darstellung in der Form

$$\begin{aligned} R_e(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &= \mathbf{v}_e^T \left[\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \mathbf{u}_e - \int_{\Omega_e} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \right] \\ &= \mathbf{v}_e^T [\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{f}_e] \end{aligned} \quad (7.56)$$

Hierbei bezeichnet

$$\mathbf{K}_e := \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} d\Omega \quad (7.57)$$

die *Elementsteifigkeitsmatrix* und

$$\mathbf{f}_e := \int_{\Omega_e} \mathbf{H}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (7.58)$$

den *Elementlastvektor*.

8 Numerisches Beispiel für ein bilineares Scheibenelement

Gegeben ist die in Abb. 8.1 dargestellte Scheibe mit konstanter Dicke d unter Zugbeanspruchung. Unter Annahme eines linear-elastischen Materialverhaltens und eines ebenen Spannungszustandes sind die horizontalen Verschiebungen am Lastangriffspunkt zu bestimmen.

8.1 System

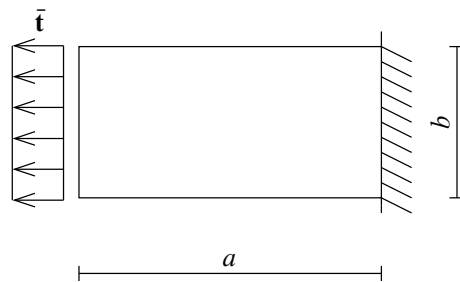


Abbildung 8.1: System und Abmessungen

$$a = 2 \text{ m} \quad b = 1 \text{ m} \quad \nu = 0 \quad d = \text{konstant} \quad \bar{t} = \begin{bmatrix} -t_x \\ 0 \end{bmatrix} \text{ [kN/m}^2\text{]} \quad (8.1)$$

$$\Rightarrow \mathbf{E} = E \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

8.2 FE-Modell

Wir diskretisieren das Gebiet mit einem bilinearen Scheibenelement.
Randbedingungen:

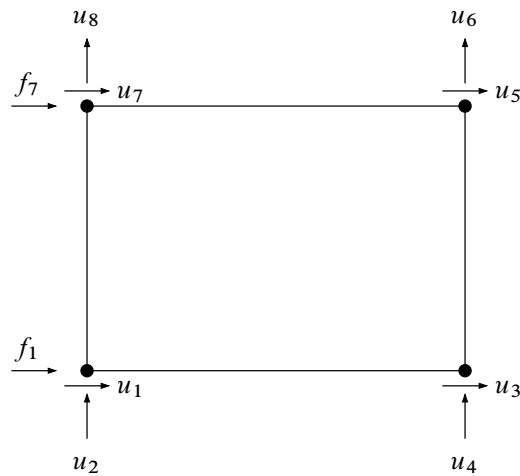


Abbildung 8.2: Freiheitsgrade Scheibenelement

Die Elementsteifigkeitsmatrix \mathbf{K}_e eines Scheibenelementes mit bilinearen Ansätzen besitzt die Dimension 8×8 . Unter Berücksichtigung der Randbedingungen reduziert sich diese durch Streichen von Zeilen und Spalten auf eine 2×2 Matrix. Das gesamte zu lösende Gleichungssystem reduziert sich damit auf

$$\underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{17} \\ K_{71} & K_{77} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{red}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\text{red}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}_{\text{red}}}.$$

Es müssen somit nur die Elemente K_{11} , K_{17} , K_{71} , K_{77} bestimmt werden.

8.3 Bestimmung der Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega$$

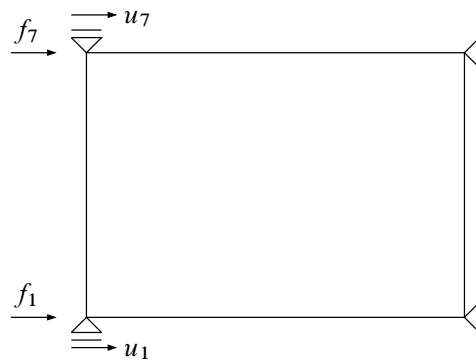


Abbildung 8.3: Randbedingungen

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{1,X_1} & 0 & h_{1,X_2} \\ 0 & h_{1,X_2} & h_{1,X_1} \\ h_{4,X_1} & 0 & h_{4,X_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}^T} \underbrace{\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} h_{1,X_1} & 0 & h_{4,X_1} \\ 0 & h_{1,X_2} & 0 \\ h_{1,X_2} & h_{1,X_1} & h_{4,X_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} d\Omega$$

Die Bestimmung der Koeffizienten von \mathbf{K}_{red} erfolgt durch elementweise Integration:

$$K_{11} = \int_{\Omega_e} (h_{1,X_1}^2 \cdot E_{11} + h_{1,X_2}^2 \cdot E_{33}) d\Omega$$

$$K_{17} = \int_{\Omega_e} (h_{1,X_1} \cdot h_{4,X_1} \cdot E_{11} + h_{1,X_2} \cdot h_{4,X_2} \cdot E_{33}) d\Omega$$

$$K_{71} = \int_{\Omega_e} (h_{1,X_1} \cdot h_{4,X_1} \cdot E_{11} + h_{1,X_2} \cdot h_{4,X_2} \cdot E_{33}) d\Omega$$

$$K_{77} = \int_{\Omega_e} (h_{4,X_1}^2 \cdot E_{11} + h_{4,X_2}^2 \cdot E_{33}) d\Omega$$

$$\Rightarrow \mathbf{K}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{17} \\ K_{17} & K_{77} \end{bmatrix}$$

Ableitungen von h_i nach X_1 und X_2

Zur Bestimmung der Koeffizienten der Steifigkeitsmatrix werden die partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach X_1 und X_2 benötigt. Diese erhält man aus der Beziehung

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

mit

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_2}{\partial s} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \det \mathbf{J} = \frac{\partial X_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_2}{\partial s} - \frac{\partial X_2}{\partial r} \cdot \frac{\partial X_1}{\partial s}.$$

Man beachte, dass \mathbf{J}^{-1} nur existiert, wenn $\det \mathbf{J} \neq 0$.

Die Anteile der Jacobi Matrix

$$\mathbf{J}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial r} & \frac{\partial X_2}{\partial r} \\ \frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_2}{\partial s} \end{bmatrix}$$

erhält man aus

$$\frac{\partial X_1}{\partial r} = \sum_i h_{i,r} \cdot X_1^i = \mathbf{h}_{,r}^T \mathbf{X}_1$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial r} = \sum_i h_{i,r} \cdot X_2^i = \mathbf{h}_{,r}^T \mathbf{X}_2$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial s} = \sum_i h_{i,s} \cdot X_1^i = \mathbf{h}_{,s}^T \mathbf{X}_1$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial s} = \sum_i h_{i,s} \cdot X_2^i = \mathbf{h}_{,s}^T \mathbf{X}_2$$

Hierbei sind

$$\mathbf{h}_{,r}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} s-1 & -s+1 & s+1 & -s-1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_{,s}^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} r-1 & -r-1 & r+1 & -r+1 \end{bmatrix}$$

die Vektoren mit den partiellen Ableitungen der Ansatzfunktionen nach r bzw. s . Ferner bezeichnen

$$\mathbf{X}_1^T = [0 \quad a \quad a \quad 0] \quad \mathbf{X}_2^T = [0 \quad 0 \quad b \quad b]$$

die Vektoren mit den Knotenkoordinaten.

Für das gegebene Problem folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial r} &= \mathbf{h}_{,r}^T \mathbf{X}_1 = \frac{1}{4} [(-s+1)a + (s+1)a] = \frac{a}{2} \\ \frac{\partial X_1}{\partial s} &= \mathbf{h}_{,s}^T \mathbf{X}_1 = \frac{1}{4} [(-r-1)a + (r+1)a] = 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial r} &= \mathbf{h}_{,r}^T \mathbf{X}_2 = \frac{1}{4} [(s+1)b + (-s-1)b] = 0 \\ \frac{\partial X_2}{\partial s} &= \mathbf{h}_{,s}^T \mathbf{X}_2 = \frac{1}{4} [(r+1)b + (-r+1)b] = \frac{b}{2} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad \det \mathbf{J} = \frac{ab}{4}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{4}{ab} \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \end{bmatrix}$$

Im vorliegenden Beispiel eines rechteckigen Elementes ist die Jacobi Matrix konstant, d.h. sie hängt nicht mehr von r und s ab. Man beachte, dass dies für ein beliebig verzerrtes Element nicht gilt.

Ableitungen nach X_1 und X_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial h_i}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{J}} \begin{bmatrix} \frac{\partial X_2}{\partial s} & -\frac{\partial X_2}{\partial r} \\ -\frac{\partial X_1}{\partial s} & \frac{\partial X_1}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial r} \\ \frac{\partial h_i}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_i}{\partial X_1} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[\frac{\partial X_2}{\partial s} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial r} - \frac{\partial X_2}{\partial r} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial s} \right] \\ \frac{\partial h_i}{\partial X_2} &= \frac{1}{\det \mathbf{J}} \left[-\frac{\partial X_1}{\partial s} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial r} + \frac{\partial X_1}{\partial r} \cdot \frac{\partial h_i}{\partial s} \right] \end{aligned}$$

z.B. h_1 :

$$h_{1,X_1} = \frac{\partial h_1}{\partial X_1} = \frac{4}{ab} \left[\frac{b}{2} \cdot \frac{1}{4}(s-1) - 0 \cdot \frac{1}{4}(r-1) \right] = \frac{1}{2a}(s-1)$$

$$h_{1,X_2} = \frac{\partial h_1}{\partial X_2} = \frac{4}{ab} \left[-0 \cdot \frac{1}{4}(s-1) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{4}(r-1) \right] = \frac{1}{2b}(r-1)$$

Bestimmung von K_{11}

$$\begin{aligned} K_{11} &= \int_{\Omega_e} (h_{1,X_1}^2 \cdot C_{11} + h_{1,X_2}^2 \cdot C_{33}) d\Omega \\ &= d \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (h_{1,X_1}^2 \cdot C_{11} + h_{1,X_2}^2 \cdot C_{33}) \det \mathbf{J} ds dr \\ &= d \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1}{2a}(s-1) \right)^2 \cdot C_{11} + \left(\frac{1}{2b}(r-1) \right)^2 \cdot C_{33} \right] \det \mathbf{J} ds dr \end{aligned}$$

Mit $C_{11} = E$ und $C_{33} = \frac{1}{2} \cdot E$ folgt:

$$K_{11} = Ed \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[\left(\frac{1}{2a}(s-1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2b}(r-1) \right)^2 \right] \det \mathbf{J} ds dr$$

Analytische Lösung:

$$K_{11} = Ed \left[\frac{a}{6b} + \frac{b}{3a} \right]$$

Mit $a = 2$ und $b = 1$ folgt

$$K_{11} = \frac{Ed}{2}$$

Numerische Lösung (Gauss-Integration):

Tabelle 8.1: Numerische Integration für K_{11}

i	r_i	s_i	$f(r_i, s_i) \cdot w_{p_i}$	w_{p_i}
1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.23325...	1
2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.08891...	1
3	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.16108...	1
4	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.01674...	1
			$\sum 0.5$	

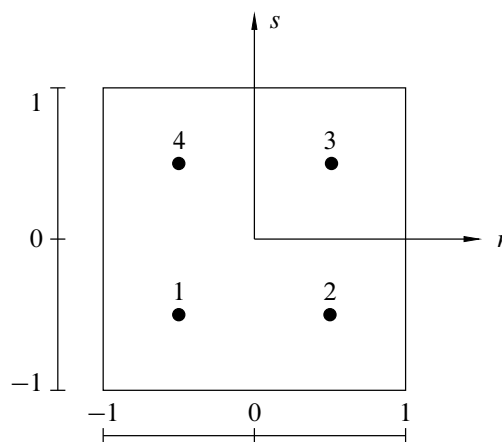


Abbildung 8.4: Gausspunkte

$$\begin{aligned}
 K_{11} &= Ed \sum_{i=1}^4 \left[\left(\frac{1}{2a}(s_i - 1) \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2b}(r_i - 1) \right)^2 \right] \cdot \det \mathbf{J}(r_i, s_i) \cdot w_{p_i} \\
 &= Ed \sum_{i=1}^4 f(r_i, s_i) \cdot w_{p_i}
 \end{aligned}$$

Bei dieser Integration sind die Wichtungsfaktoren $w_{p_i} = 1.0$. In Tabelle 8.1 sind die Ergebnisse der einzelnen Gausspunkte aufgeführt. Bei hinreichend großer Anzahl von Nachkommastellen ergibt sich

$$K_{11} = \frac{Ed}{2}.$$

Bestimmung von K_{17} , K_{71} , K_{77} erfolgt analog:

$$K_{17} = -\frac{Ed}{4} \quad K_{71} = -\frac{Ed}{4} \quad K_{77} = \frac{Ed}{2}$$

8.4 Bestimmung des Lastvektors

In unserem Beispiel greifen nur Randlasten \bar{t} an. Die zugehörigen äquivalenten Knotenkräfte infolge von Randlasten berechnen sich aus

$$\mathbf{F}_\Gamma = \int_\Gamma \mathbf{H}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma.$$

Exemplarisch ergibt sich die Knotenkraft f_1 mit konstanter Dicke d somit aus

$$f_1 = \int_\Gamma h_1 \bar{t}_1 d\Gamma = d \int_l h_1 \bar{t}_1 dl$$

Am Rand mit vorgegebenen \bar{t} gilt $r = -1$, so dass sich die Interpolationsfunktion $h_1 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$ reduziert zu $h_1 = h_1|_{r=-1} = \frac{1}{2}(1-s)$. Die differentielle Länge dl bezogen auf die Elementkante lässt sich mit Hilfe der Determinante des Jacobi-Operators in den natürlichen Koordinaten ausdrücken. Es gilt

$$dl = \det \mathbf{J}^s ds \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{J}^s = \sqrt{\left(\frac{\partial X_1}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial s}\right)^2}.$$

Mit den zuvor gewonnenen partiellen Ableitungen nach den natürlichen Koordinaten und $\bar{t}_1 = -t_{X_1}$ folgt

$$\begin{aligned} f_1 &= d \int_s h_1 \bar{t}_1 \det \mathbf{J}^s ds \\ &= -d \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1-s) t_{X_1} \frac{b}{2} ds \\ &= -\frac{1}{2} d b t_{X_1}. \end{aligned}$$

Analog hierzu erhält man mit $h_4 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$

$$f_7 = d \int_s h_4 \bar{t}_1 \det \mathbf{J}^s ds = -d \int_{-1}^1 \frac{1}{2} (1+s) t_{X_1} \frac{b}{2} ds = -\frac{1}{2} d b t_{X_1}$$

und mit $b = 1$ gilt somit

$$f_1 = f_7 = -\frac{1}{2} d b t_{X_1} = -\frac{1}{2} d t_{X_1}.$$

Erwartungsgemäß verteilt sich die konstante Randlast zu gleichen Teilen auf die beiden Knoten.

8.5 Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ed \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_{\text{red}}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_{\text{red}}} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_7 \end{bmatrix} = d t_{X_1} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}_{\text{red}}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{u}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{red}}^{-1} \cdot \mathbf{f}_{\text{red}}$$

$$\mathbf{K}_{\text{red}}^{-1} = \frac{16}{3Ed} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{bmatrix} = \frac{16}{3Ed} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} d t_{X_1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{16}{3E} \left(-\frac{1}{4} t_{X_1} - \frac{1}{8} t_{X_1} \right) = -\frac{2 t_{X_1}}{E}$$

$$u_7 = \frac{16}{3E} \left(-\frac{1}{8} t_{X_1} - \frac{1}{4} t_{X_1} \right) = -\frac{2 t_{X_1}}{E}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2 t_{X_1}}{E} \\ -\frac{2 t_{X_1}}{E} \end{bmatrix}$$

8.6 Vergleich Stablösung

Die Lösung für das gewählte Modellproblem mit $\nu = 0$ unter einfacher Zugbeanspruchung lässt sich einfach durch ein eindimensionales Ersatzproblem bestimmen.

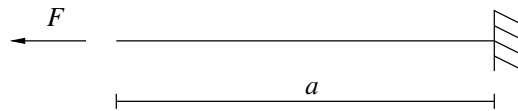


Abbildung 8.5: Eingespannter Stab

Wir betrachten den Dehnstab in Abb. 8.5. Mit $a = 2$, $A = b \cdot d$, $F = t_{X_1} \cdot b \cdot d$ und $b = 1$ folgt

$$u = \frac{a}{EA}(-F) = -\frac{2 t_{X_1}}{E}.$$

9 FEMSOLID - Ein Beispiel für ein FEM-Programm

10 Erweiterte Elementformen für die Scheibe

11 Die gemischte Methode für die Scheibe

Bei Anwendung der allgemeinen Verschiebungsmethode treten bei inkompressiblen oder annähernd inkompressiblen Materialien, also wenn die Querkontraktionszahl $0.4 \leq \nu \leq 0.5$ ist, Probleme auf. Diese Probleme sind auf den so genannten Locking-Effekt zurückzuführen. Die Lösung beim Auftreten des Locking-Effektes ist dadurch gekennzeichnet, dass die Verschiebungen infolge der zu steifen Abbildung des Systems zu klein sind. Die Konvergenz gegen die exakte Lösung stellt sich mit zunehmender Netzverfeinerung zwar ein, jedoch wesentlich langsamer als bei lockingfreien Elementen. Abhilfe für solche Probleme kann die Anwendung einer gemischten Formulierung schaffen. Im Rahmen dieser Übung wird hierzu die B-bar Methode betrachtet.

11.1 Grundgleichungen

Zur Herleitung der Variationsformulierung werden zunächst die Grundgleichungen betrachtet und die Zerlegung von Verzerrungen und Spannungen in volumetrische und deviatorische Anteile dargestellt.

11.1.1 Kugeltensor und Deviator

Die Spaltenmatrix der Verzerrungen sowie der Spannungskomponenten lautet

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{yz} \quad 2\varepsilon_{xz}]^T, \\ \boldsymbol{\sigma} &= [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{yz} \quad \sigma_{xz}]^T.\end{aligned}\tag{11.1}$$

Weiterhin ist $\mathbf{m} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$ eine Hilfsgröße. Der Druck oder volumetrischer Anteil der Spannungen ist durch

$$p = \sigma_v = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}\tag{11.2}$$

gegeben. Für den volumetrischen Anteil der Verzerrungen (Volumendilatation) gilt

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}.\tag{11.3}$$

Die deviatorischen Anteile der Spannungen und Verzerrungen berechnen sich aus der Differenz der vollständigen Spannungen und Verzerrungen abzüglich der skizzierten

volumetrischen Anteile. Damit gilt für den Spannungsdeviator

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{m} p = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right) \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{I}_{\text{dev}} \boldsymbol{\sigma} \quad (11.4)$$

sowie für den Verzerrungsdeviator

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \varepsilon_v = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right) \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{I}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (11.5)$$

Die *Projektionsmatrix* (allgemeiner der Projektionstensor)

$$\mathbf{I}_{\text{dev}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \quad (11.6)$$

beschreibt die Projektion der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ bzw. Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf die entsprechenden deviatorischen Anteile $\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = \mathbf{I}_{\text{dev}} \boldsymbol{\sigma}$ bzw. $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{dev}} = \mathbf{I}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}$.

Ebenso gelten mit $\mathbf{I}_{\text{vol}} = \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ die Beziehungen

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} = \mathbf{I}_{\text{vol}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{m} p \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{vol}} = \frac{1}{3} \mathbf{I}_{\text{vol}} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \mathbf{m} \varepsilon_v. \quad (11.7)$$

11.1.2 Schwache Form der Gleichgewichtsbedingung

Die virtuelle Arbeit $\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}$ kann mit Hilfe der obigen Beziehungen in der Form

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{vol}} = \mathbf{E}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{m} p \quad (11.8)$$

darstellen. Hieraus folgt die schwache Form der Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} G_u = & \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} p d\Omega \\ & - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Die negativen Terme sind Anteile aus der äußeren Belastung und werden hier nicht weiter erläutert (siehe klassische FEM).

11.1.3 Beschreibung der Volumendilatation

Die Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}$ ergeben sich aus den Verschiebungen \mathbf{u} durch die Differentialoperatormatrix \mathbf{D} in der Form

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{u}. \quad (11.10)$$

Damit besteht die starke Formulierung für die Beziehung der Volumendilatation und der Verschiebungen in der Form

$$\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \varepsilon_v = \mathbf{m}^T \mathbf{D} \mathbf{u} - \varepsilon_v = \mathbf{0}. \quad (11.11)$$

Die zugehörige arbeitskonforme Größe ist der virtuelle Druck δp und man erhält somit die schwache Form dieser Beziehung

$$G_p = \int_{\Omega} \delta p \left[\mathbf{m}^T \mathbf{D} \mathbf{u} - \varepsilon_v \right] d\Omega = 0. \quad (11.12)$$

11.1.4 Beschreibung der Druckspannungen

Die Druckspannungen p können über die Volumendilatation ε_v mit Hilfe des Kompressionsmoduls K beschrieben werden und es gilt

$$p = K \varepsilon_v \quad \text{sowie} \quad \sigma_{\text{vol}} = \mathbf{m} p \quad \text{mit} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (11.13)$$

Man erkennt, dass für den Grenzfall der Inkompressibilität der Kompressionsmodul unbegrenzt wächst, also $K \rightarrow \infty$ für $\nu \rightarrow 0,5$.

Die schwache Formulierung dieser Beziehung führt zu

$$G_{\varepsilon_v} = \int_{\Omega} \delta \varepsilon_v [K \varepsilon_v - p] d\Omega = 0, \quad (11.14)$$

wobei der virtuelle Druck δp die zugehörige arbeitskonforme Größe ist.

11.1.5 Beschreibung der Deviatorspannungen

Die Deviatorspannungen ergeben sich mit dem deviatorischen Anteil der Stoffmatrix zu

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{dev}} = \mathbf{E}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{mit} \quad \mathbf{E}_{\text{dev}} = 2G \left(\mathbf{I}_0 - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T \right). \quad (11.15)$$

Hierbei wird der Schubmodul G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (11.16)$$

sowie die Matrix

$$\mathbf{I}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

verwendet.

11.1.6 Zusammenstellung der schwachen Formulierungen

An dieser Stelle werden zunächst die integralen Forderungen G_u , G_p und G_{ε_v} zur Bestimmung der Felder \mathbf{u} , p und ε_v zusammengestellt. Es gilt somit

$$\begin{aligned} G_u &= \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{E}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} p d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0, \\ G_p &= \int_{\Omega} \delta p \left[\mathbf{m}^T \mathbf{D} \mathbf{u} - \varepsilon_v \right] d\Omega = 0, \\ G_{\varepsilon_v} &= \int_{\Omega} \delta \varepsilon_v [K \varepsilon_v - p] d\Omega = 0 \end{aligned}$$

11.1.7 Energiepotential

Die gesamte potentielle Energie bezüglich der drei Felder für die Verschiebungen \mathbf{u} , den hydrostatischen Druck p und die Volumendilatation ε_v lautet

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\varepsilon}_u^T \mathbf{E}_{\text{dev}} \boldsymbol{\varepsilon}_u + \varepsilon_v K \varepsilon_v \right) d\Omega + \int_{\Omega} p \left(\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}_u - \varepsilon_v \right) d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma. \end{aligned} \quad (11.18)$$

Durch Variation der potentiellen Energie Π nach den Verschiebungen, dem Druck sowie der Volumendilatation erhält man

$$\delta \Pi = \delta_u \Pi + \delta_p \Pi + \delta_{\varepsilon_v} \Pi = 0. \quad (11.19)$$

Mit der beliebigen Wahl der virtuellen Größen $\delta \hat{\mathbf{u}}$, $\delta \hat{p}$ und $\delta \hat{\varepsilon}_v$ folgen damit auch die drei Bedingungen $G_u = \delta_u \Pi = 0$, $G_p = \delta_p \Pi = 0$ sowie $G_{\varepsilon_v} = \delta_{\varepsilon_v} \Pi = 0$.

11.2 Diskretisierung der schwachen Formen

11.2.1 Unabhängige Ansätze für die drei Feldgrößen

Die drei Feldgrößen \mathbf{u} , p und ε_v werden unabhängig voneinander approximiert und führen auf Elementebene zur Beschreibung

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e \\ p &\approx p_h = \mathbf{N}_p p_e \\ \varepsilon_v &\approx \varepsilon_{v;h} = \mathbf{N}_{\vartheta} \boldsymbol{\vartheta}_e. \end{aligned} \quad (11.20)$$

Hierin sind N_u, N_p, N_v die Ansatzfunktionen und $\mathbf{u}_e, \mathbf{p}_e, \boldsymbol{\vartheta}_e$ stellen die Unbekannten auf Elementebene dar. Diese können in einem erweiterten Unbekanntenvektor

$$\hat{\mathbf{u}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_e \\ \mathbf{p}_e \\ \boldsymbol{\vartheta}_e \end{bmatrix} \quad (11.21)$$

für das aktuelle Element dargestellt werden. Für die Variation des Potentials folgt somit

$$\delta \Pi_e = \delta \hat{\mathbf{u}}_e^T \{ \hat{\mathbf{k}}_e \hat{\mathbf{u}}_e - \hat{\mathbf{f}}_e \}. \quad (11.22)$$

Weiterhin ergeben sich die modifizierte Elementsteifigkeitsmatrix sowie der modifizierte Elementlastvektor

$$\hat{\mathbf{k}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_e & \mathbf{C}_e & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_e^T & \mathbf{0} & -\mathbf{E}_e \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}_e^T & \mathbf{H}_e \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \hat{\mathbf{f}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_e \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (11.23)$$

mit den Submatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{\text{dev}} \mathbf{B} \, d\Omega \\ \mathbf{C}_e &= \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{m} N_p \, d\Omega \\ \mathbf{G}_e &= \int_{\Omega_e} N_\vartheta^T N_p \, d\Omega \\ \mathbf{H}_e &= \int_{\Omega_e} N_\vartheta^T \mathbf{K} N_\vartheta \, d\Omega \\ \mathbf{f}_e &= \int_{\Omega_e} N_u^T \mathbf{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} N_u^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (11.24)$$

Die Verwendung globaler Unbekanntenvektoren und die Assemblierung der Elementbeiträge führt auf das globale Gleichungssystem

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}} \quad (11.25)$$

mit den globalen Größen

$$\hat{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{0} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{E}^T & \mathbf{H} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \\ \boldsymbol{\Theta} \end{bmatrix} \quad \text{sowie} \quad \hat{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (11.26)$$

11.2.2 Statische Kondensation auf Systemebene

Die zweite Gleichung des globalen Gleichungssystems $C^T U - E \Theta = \mathbf{0}$ besitzt die Lösung

$$\Theta = E^{-1} C^T U = W U. \quad (11.27)$$

Hierbei wird die Invertierbarkeit von E vorausgesetzt, die bei identischer Wahl der Ansätze für den Druck p und die Volumendilatation ε_v , d.h. $N_p = N_\vartheta$ mit einer symmetrischen und positiv definiten Matrix E gegeben ist.

Die dritte Gleichung $-E^T P + H \Theta = 0$ besitzt unter Verwendung der obigen Beziehung die Lösung

$$P = E^{-T} H \Theta = E^{-T} H E^{-1} C^T U. \quad (11.28)$$

Damit kann die erste Gleichung $A U + C P = F$ mit der modifizierten Steifigkeitsmatrix $\bar{K} = A + W^T H W$ in die Form

$$\bar{K} U = F \quad (11.29)$$

gebracht werden.

11.2.3 Statische Kondensation auf Elementebene

Bei geschickter Wahl der Ansatzfunktionen N_u , N_ϑ und N_p kann die statische Kondensation bereits auf Elementebene erfolgen. Hierzu werden unstetige Ansätze für die Größen ε_v und p im Element gewählt. Die Verschiebungen \mathbf{u} werden weiterhin stetig über die Elemente approximiert. Damit liefern die Unbekannten \mathbf{p}_e und ϑ_e nur im betreffenden Element e Beiträge. Die Matrizen C , E und H besitzen damit Diagonalstruktur und eine Zerlegung der Gleichungen (11.27) und (11.31) auf Systemebene in n_e Gleichungen für die entsprechenden Elemente ist möglich. Man erhält somit

$$\vartheta_e = E_e^{-1} C_e^T \mathbf{u}_e = W_e \mathbf{u}_e \quad (11.30)$$

sowie

$$\mathbf{p}_e = E_e^{-T} H_e \vartheta_e = E_e^{-T} H_e E_e^{-1} C_e^T \mathbf{u}_e. \quad (11.31)$$

Damit kann die modifizierte Steifigkeitsmatrix \bar{k}_e in der Form

$$\bar{k}_e = A_e + W_e^T H_e W_e \quad (11.32)$$

berechnet werden. Die kondensierte Gesamtsteifigkeitsmatrix \bar{K} der gemischten Methode kann in diesem Fall durch die Assemblierung der kondensierten Elementsteifigkeitsmatrix \bar{k}_e bestimmt werden.

11.2.4 Die B-bar Formulierung

In einem weiteren Schritt wird die Diskretisierung 11.20 durch die Wahl $N_p = 1$ und $N_\vartheta = 1$ und bilinearen Ansätzen für die Verschiebungen weiterhin vereinfacht

und es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\approx \mathbf{u}_h = \mathbf{N}_u \mathbf{u}_e \\ p &\approx p_h = \mathbf{N}_p \mathbf{p}_e = N_p p_e = p_e \\ \varepsilon_v &\approx \varepsilon_{v,h} = \mathbf{N}_\vartheta \boldsymbol{\vartheta}_e = N_\vartheta \vartheta_e = \vartheta_e. \end{aligned} \quad (11.33)$$

Das Element zeichnet sich dadurch aus, dass im Element sowohl der Druck p als auch die Volumendilatation ε_v jeweils durch eine konstante Größe p_e bzw. ϑ_e approximiert werden.

So lässt sich die Beziehung (11.23) wie folgt

$$\bar{\mathbf{A}} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (11.34)$$

darstellen. Hierbei sind

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} d\Omega \quad - \text{modifizierte Elementsteifigkeitsmatrix} \\ \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{I}_{\text{dev}} \mathbf{B} + \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{N}_\vartheta \mathbf{W} \quad - \text{modifizierte Verzerrungsverschiebungsmatrix} \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dev}} + K \mathbf{m} \mathbf{m}^T \quad - \text{Stoffmatrix} \end{aligned} \quad (11.35)$$

Mit $\mathbf{W} = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{C}^T$, $\mathbf{I}_{\text{dev}} = \mathbf{I} - \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{m}^T$ und der (6×6) Einheitsmatrix \mathbf{I} sind alle Größen angegeben um das B-bar Element implementieren zu können.

11.3 Implementierung der B-bar Methode

11.3.1 Berechnungsschema der modifizierten Steifigkeitsmatrix

1.) Vorbereitung der numerischen Integration und Definition der Stoffmatrix

Entscheiden ob EVZ/ESZ

$E = ..$ (Stoffmatrix)

$Gp = ..$ (Gaußpunkte)

$W = ...$ (Gewichte)

2.) Schleife über die Gaußpunkte

Anfang

$\bar{B} = ...$ (analog zur Standard-FEM)

$E = ...$

Ende

3.) Bestimmung der Hilfsgrößen

$$C^T = m^T B$$

$$G^{-1} = \frac{1}{G}$$

$$W = G^{-1} C^T$$

4.) Schleife über die Gaußpunkte

Anfang

Die modifizierte Verzerrungsverschiebungsmatrix wird bestimmt

$$\bar{B} = I_{\text{dev}} B + \frac{1}{3} m W$$

Die modifizierte Elementsteifigkeitsmatrix wird bestimmt

$$\bar{A} = \bar{B}^T E \bar{B} dV$$

Ende

11.3.2 Hinweise zur Implementierung

1. Gleiche Ansätze für p und ε_v wurden gewählt um eine quadratische Matrix für G zu erhalten (Vorteil der Invertierbarkeit). In dem hier betrachteten Fall ist G gerade ein Skalar.
2. Konstante Ansätze für p und ε_v wurden gewählt um diese Größen auf der Elementebene eliminieren zu können. Da bei konstanten Ansätzen die Funktionen Sprünge auf den Elementrändern aufweisen, sind Sie unabhängig von einander.

3. Die Matrix \mathbf{B} aus dem Schritt 2). darf nicht beim Schritt 4). verwendet werden, da die Beziehung

$$\int x^2 \neq \int x \cdot \int x$$

gilt.

4. Die Bestimmung der Verzerrungsverschiebungsmatrix im Schritt 2). ist analog zur Standard-FEM durchzuführen.
5. Die Modifizierung des Standard-FEM-Programms erfolgt ausschließlich in der Elementroutine.

11.3.3 Überprüfung der Dimensionen einzelner Größen

Im Folgenden werden mit '*' Zahlenwerte angedeutet. Die Dimensionen der Größen werden für einen Scheibenelement angegeben.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 3)} \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 8)} \\
 E &= [*]^{(1 \times 1)} \quad \rightarrow \quad E^{-1} = [*]^{(1 \times 1)} \\
 \mathbf{m}^T &= [1 \quad 1 \quad 0]^{(1 \times 3)} \\
 N_p &= N_\vartheta = 1 \\
 \mathbf{C}^T &= \int_{\Omega} \mathbf{m}^T \mathbf{B} = [* \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *]^{(1 \times 8)} \\
 \rightarrow \mathbf{W} &= G^{-1} \mathbf{C}^T = [* \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad * \quad *]^{(1 \times 8)} \\
 \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{I}_{\text{dev}} \mathbf{B} + \frac{1}{3} \mathbf{m} \mathbf{W} \\
 &= \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 8)} + \begin{bmatrix} * \\ * \\ * \end{bmatrix}^{(3 \times 1)} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(1 \times 8)} \\
 &= \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 8)} \\
 \bar{\mathbf{A}} &= \int_{\Omega} \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{E} \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(8 \times 3)} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 3)} \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(3 \times 8)} \\
 &= \begin{bmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * & * & * \end{bmatrix}^{(8 \times 8)}
 \end{aligned}$$

(11.36)

11.4 Übung zum Thema: B-bar Methode

1. Implementieren Sie die B-bar Methode in das Programm `FemSolid` (Das Programm befindet sich im Austauschordner. Alternativ kann das Programm von der letzten Übung verwendet werden).
2. Sorgen Sie dafür, dass der Benutzer des Programms zwischen dem klassischen Verschiebungselement und der B-bar Methode umschalten kann.
3. Für das Modell im Bild ?? soll eine Konvergenzstudie durchgeführt werden. Hierzu soll das Programm `femSolid` dahingehend verändert werden, dass es das vorhandene Netz von Iteration zur Iteration automatisch verfeinert und zu jeder Iteration die Verschiebung in y -Richtung am oberem, rechtem Punkt speichert.
4. Führen Sie jeweils für die Verschiebungs- und für die B-bar Methode zwei Konvergenzstudien durch. Die Querkontraktion soll dabei zu $\nu = 0.33$ und zur $\nu = 0.49$ gesetzt werden.
5. Plotten Sie die Ergebnisse. Dabei soll das eine Diagramm für $\nu = 0.33$ und das andere für $\nu = 0.49$ erstellt werden. Tragen Sie die Verschiebungen über die Anzahl der Elemente in die jeweiligen Diagramme ein.

Geometrie	Material
$a = 16$	$E = 70$
$b = 44$	$\nu = 0.33/\nu = 0.49$
$c = 48$	$F = 100$

Eine Möglichkeit das Netz zu verfeinern ist die Unterteilung der Seiten der Scheibe im Bild ?? in gleich viele Elemente. Über die Anzahl der Elemente pro Kante nek würde man dann in den Diagrammen die Verschiebungen abtragen. Ein Beispiel für die Vernetzung dieser Art ist im Bild ?? dargestellt.

11.5 Vergleichslösung mit Ansys

Im Folgenden werden die Konvergenzkurven für die Verschiebungs- und die B-bar-Methode dargestellt. Diese Konvergenzkurven wurden mit der elften Version Ansys unter Verwendung der Elemente `Plane 42` und `Plane 182` erstellt.

Anhang
Notation und Literatur

Notation und Symbole

Mathematik

Grundlagen

\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
$(\cdot)', (\cdot)_{,x}$	Ableitung nach Koordinate x
\forall	Allquantor (<i>für alle</i>)
\exists	Existenzquantor (<i>es existiert</i>)
\mathcal{L}	Differentialgleichungsoperator
b	Rechte Seite der Differentialgleichung $\mathcal{L}u = b$
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$
$F(\cdot)$	Linearform $F : V \rightarrow \mathbb{R}$

Kontinuumsmechanik

Gebiete und Ränder

Ω	Gebiet (offenes Gebiet ohne Rand)
$\bar{\Omega}$	Gebiet mit Rand $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$
Ω^i	Teilgebiete von Ω
Γ	Rand $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$
Γ_D	Dirichlet-Rand
Γ_N	Neumann-Rand
Γ_K	Kopplungs-Rand zwischen den Teilkörpern
A	Querschnittsfläche
L	Strukturlänge der Stäbe und Balken

Fundamentale Funktionen

u	Verschiebungsfunktion
v	Testfunktion
δu	Virtuelle Verschiebung
p, q	Volumenlasten, parallel und senkrecht zur Stabachse
F	vorgegebene Randlasten
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
$\boldsymbol{\varepsilon}_T$	Thermische Verzerrungen
$\boldsymbol{\varepsilon}_\sigma$	Spannungsbildende Verzerrungen
$\boldsymbol{\sigma}$	Spannungstensor
\mathbf{E}	Materialtensor

E	Elastizitätsmodul
G	Schubmodul
ν	Querdehnzahl
α_T	Wärmeausdehnungskoeffizient
ΔT	Temperaturänderung
$\Delta T_m, \Delta T_{lin}$	konstanter und linearer Anteil der Temperaturerhöhung
$\Delta T_o, \Delta T_u$	Temperaturerhöhung an der oberen und unteren Kante

Randbedingungen und äußere Lasten

\bar{u}	Vorgegebene Verschiebung $u = \bar{u}$ der Stabachse in x -Richtung
\bar{w}	Vorgegebene Durchbiegung $w = \bar{w}$ der Stabachse in z -Richtung
$\bar{\varphi}$	Vorgegebene Verdrehung $\varphi = \bar{\varphi}$ der Stabachse um die y -Achse
\bar{N}	Vorgegebene Normalkraft $N = \bar{N}$
\bar{Q}	Vorgegebene Querkraft $Q = \bar{Q}$
\bar{M}	Vorgegebenes Biegemoment $M = \bar{M}$
Hinweise	Die vorgeschriebenen Werte der Randbedingungen werden durch einen Überstrich gekennzeichnet und beispielsweise gilt für eine Einzelkraft F am Neumann-Rand $x = 0$ die Beziehung $N(0) = \bar{N}(0) = F$.

Energie und Variation

$R(\cdot, \cdot)$	Schwache Form des Gleichgewichts (erste Greensche Identität)
$R_e(\cdot, \cdot)$	Elementanteil an R
$R_k(\cdot)$	Knotenanteil aus den Randbeiträgen der schwachen Form
Π	Gesamte potentielle Energie
Π_i	Innere potentielle Energie
Π_a	Äußere potentielle Energie
W	Arbeit
W_i	Innere Arbeit
W_a	Äußere Arbeit
δW	Gesamte virtuelle Arbeit
δW_i	Innere virtuelle Arbeit
δW_a	Äußere virtuelle Arbeit

Finite Elemente Methode

Gebiete, Ränder und Elemente

Ω_h	FE-Approximation Ω_h des Gebietes Ω
Γ_h	FE-Approximation Ω_h des Randes Γ
Ω_e	Elementgebiet ohne Rand
Γ_e	Rand des Elementes Ω_e
$\bar{\Omega}_e$	Elementgebiet mit Rand $\bar{\Omega}_e = \Omega_e \cup \Gamma_e$
l, l_e	Elementlänge

Variablen

m_k	Anzahl der Knoten am Element <i>ENODE</i>
m_f	Anzahl der Freiheitsgrade am Knoten <i>KDOF</i>
m_e	Anzahl der Freiheitsgrade am Element <i>EDOF</i>
n_e	Anzahl der Elemente auf Systemebene <i>NEL</i>
n_k	Anzahl der Knoten auf Systemebene <i>NNODE</i>
n_f	Anzahl der Systemfreiheitsgrade <i>NDOF</i>

Diskrete Energie und diskrete schwache Form

$R_h(\cdot, \cdot)$	Schwache Form des Gleichgewichts (erste Greensche Identität)
$R_{h,e}(\cdot, \cdot)$	Elementanteil an <i>R</i>
$R_{h,k}(\cdot)$	Knotenanteil aus den Randbeiträgen der schwachen Form
Π_h	Gesamte potentielle Energie
$\Pi_{h,e}$	Elementanteil an der gesamten potentiellen Energie
$\Pi_{h,k}$	Knotenanteil an der gesamten potentiellen Energie
$\Pi_{h,i}$	Innere potentielle Energie
$\Pi_{h,i,e}$	Elementanteil an der inneren potentiellen Energie
$\Pi_{h,i,k}$	Knotenanteil an der inneren potentiellen Energie
$\Pi_{h,a}$	Äußere potentielle Energie
$\Pi_{h,a,e}$	Elementanteil an der äußeren potentiellen Energie
$\Pi_{h,a,k}$	Knotenanteil an der äußeren potentiellen Energie
δW_h	Gesamte virtuelle Arbeit
$\delta W_{h,e}$	Elementanteil an der gesamten virtuellen Arbeit
$\delta W_{h,k}$	Knotenanteil an der gesamten virtuellen Arbeit
$\delta W_{h,i}$	Innere virtuelle Arbeit
$\delta W_{h,i,e}$	Elementanteil an der inneren virtuellen Arbeit
$\delta W_{h,i,k}$	Knotenanteil an der inneren virtuellen Arbeit
$\delta W_{h,a}$	Äußere virtuelle Arbeit
$\delta W_{h,a,e}$	Elementanteil an der äußeren virtuellen Arbeit
$\delta W_{h,a,k}$	Knotenanteil an der äußeren virtuellen Arbeit

Weitere Werte

h_i	Ansatzfunktion am Knoten <i>i</i>
\mathbf{h}	Vektor der Ansatzfunktionen
u_h	FE-Approximation der Verschiebungsfunktion
v_h	FE-Approximation der Testfunktion
u_j^i	Diskrete Verschiebung am Knoten <i>i</i> in Richtung <i>j</i>
x_j^i	Knotencoordinate am Knoten <i>i</i> in Richtung <i>j</i>
\mathbf{D}	Differentialoperator
\mathbf{A}_e	Boolesche Elementmatrix
\mathbf{T}	Transformationsmatrix
$\mathbf{k}_e / \mathbf{k}_{e;r}$	Elementsteifigkeitsmatrix (reduziertes lokales KOS (<i>x</i>))
$\mathbf{k}_{e;x}$	Elementsteifigkeitsmatrix (vollständiges lokales KOS (<i>x</i> , <i>y</i>))
$\mathbf{k}_{e;X}$	Elementsteifigkeitsmatrix (globales KOS (<i>X</i> , <i>Y</i>))

\mathbf{K}_e	Elementsteifigkeitsmatrix auf Systemebene
\mathbf{K}	Systemsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{u}_e / \mathbf{u}_{e;r}$	Elementverschiebungsvektor (reduziertes lokales KOS (x))
$\mathbf{u}_{e;x}$	Elementverschiebungsvektor (vollständiges lokales KOS (x, y))
$\mathbf{u}_{e;X}$	Elementverschiebungsvektor (globales KOS (X, Y))
\mathbf{U}	Systemverschiebungsvektor
$\mathbf{f}_e / \mathbf{f}_{e;r}$	Elementlastvektor (reduziertes lokales KOS (x))
$\mathbf{f}_{e;p}$	Anteil am Elementlastvektor infolge \underline{p}
$\mathbf{f}_{e;\bar{N}}$	Anteil am Elementlastvektor infolge \bar{N}
$\mathbf{f}_{e;T}$	Anteil am Elementlastvektor infolge ΔT
$\mathbf{f}_{e;x}$	Elementlastvektor (vollständiges lokales KOS (x, y))
$\mathbf{f}_{e;X}$	Elementlastvektor (globales KOS (X, Y))
\mathbf{F}_e	Elementlastvektor auf Systemebene
\mathbf{F}	Systemlastvektor
\mathbf{r}_e	Elementresiduum
\mathbf{R}	Residuum

Literaturverzeichnis

- [1] BARTHOLD, Franz-Joseph: Einführung in die Finite Elemente Methode - Stabtragwerke / Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, TU Dortmund. 2010. – Vorlesungsunterlagen [5](#), [6](#)
- [2] BARTHOLD, Franz-Joseph ; STIEGHAN, Jörg: Einführung in die Kontinuumsmechanik: Vektor- und Tensorrechnung / Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, TU Dortmund. 2009. – Vorlesungsunterlagen [2.1](#)
- [3] BOER, Reint de: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag, 1982. – ISBN 978-3540118343 [2.1](#), [3.1.2](#), [3.2.1](#)
- [4] BOUSSINESQ, J.: *Applications des potentiels à l'études de l'équilibre et du mouvement des solides élastique*. Paris : Gauthier-Villars,, 1885 [4.3](#)
- [5] CIARLET, P.G.: *Mathematical Elasticity I: Three-dimensional Elasticity*. Amsterdam : North-Holland, 1988 [2.4.6.1](#)
- [6] ESCHENAUER, Hans ; OHLHOFF, Niels ; SCHNELL, Walter: *Applied Structural Mechanics*. Springer-Verlag, 1997. – ISBN 978-3-540-61232-2 [2](#)
- [7] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer, 1954 [4.3](#)
- [8] GROSS, Dietmar ; HAUGER, Werner ; WRIGGERS, Peter: *Technische Mechanik, Band 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer-Verlag, 2009 [2](#)
- [9] KLINGBEIL, Eberhard: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Hochschultaschenbücher, 1989 [2.1](#)
- [10] SCHADE, Heinz ; NEEMANN, Klaus: *Tensoranalysis*. 3. Auflage. de Gruyter, 2009. – ISBN 978-3-11-020696-8 [2.1](#)
- [11] STEIN, Erwin ; BARTHOLD, Franz-Joseph: Elastizitätstheorie. In: MEHLHORN, Gerhard (Hrsg.): *Der Ingenieurbau: Grundwissen* Bd. Werkstoffe/Elastizitätstheorie. Ernst & Sohn, 1996, S. 165–428 [2](#)
- [12] STEIN, Erwin ; BARTHOLD, Franz-Joseph: Einführung in die Elastizitätstheorie / Numerische Methoden und Informationsverarbeitung, TU Dortmund. 2004. – Vorlesungsunterlagen [2](#)

Index

- Airysche Spannungsfunktion, 66, 68
- biharmonische Differentialgleichungen
für die Verschiebungskomponenten, 60
- bulk modulus, 53
- Differentialgleichung für die Scheibe,
69
- Elastizitätsmodul, 53
- Fouriersches Integral, 76
- Gleichungen von Beltrami, 63
- Gleichungen von Michell, 63
- Integrabilitätsbedingungen, 23
- Kompatibilitätsbedingungen, 23, 61
- Kompressionsmodul, 53
- Maxwellsche Spannungsfunktion, 64
- Poisson's ratio, 53
- Querkontraktionszahl, 53
- Schubmodul, 53
- Spannungskonzentrationsfaktoren, 92
- St. Venantschen Kompatibilitätsbedingungen, 23
- Verträglichkeitsbedingungen, 23, 61
- Young's modulus, 53

